

Министерство транспорта Российской Федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта
ГОУ ВПО «Дальневосточный государственный
университет путей сообщения»

Кафедра «Электротехника,
электроника, электромеханика»

Е. В. Константинова Е. С. Гафиатулина

**РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ
В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ**

Практикум

Рекомендовано
Методическим советом ДВГУПС
в качестве учебного пособия

Хабаровск
Издательство ДВГУПС
2006

УДК 621.3.011.71 (075.8)
ББК 3 211.612 я 73
К 650

Рецензенты:

Кафедра «Электротехника и электроника»
Тихоокеанского государственного университета
(заведующий кафедрой доктор физико-математических наук,
профессор *А. П. Кузьменко*)

Кандидат технических наук, доцент кафедры «Теория электросвязи и цепей»
Хабаровского института инфокоммуникаций (филиал)
Сибирского государственного университета телекоммуникаций и информатики
А. Н. Семешко

Константинова, Е. В.

К 650

Расчет переходных процессов в линейных электрических цепях : практикум / Е. В. Константинова, Е. С. Гафиатулина. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2006. – 80 с. : ил.

Практикум соответствует ГОС ВПО направления 140200 «Электроэнергетика» специальностей 140203 «Релейная защита и автоматизация электроэнергетических систем», 140204 «Электрические станции», 140205 «Электроэнергетические системы и сети», 140211 «Электроснабжение»; направления 190400 «Системы обеспечения движения поездов» специальностей 190401 «Электроснабжение железных дорог», 190402 «Автоматика, телемеханика и связь на железнодорожном транспорте»; направления 140600 «Электротехника, электромеханика и электротехнологии» специальности 140604 «Электропривод и автоматика промышленных установок и технологических комплексов» по дисциплине «Теоретические основы электротехники».

Приводятся необходимые теоретические сведения о переходных процессах в электрических цепях, методические разработки практических занятий, задания для самостоятельной работы студентов.

Предназначен студентам 2-го и 3-го курсов дневной и 4-го курса заочной форм обучения указанных специальностей, а также студентам специальностей, изучающих дисциплину «Основы теории цепей».

УДК 621.3.011.71 (075.8)
ББК 3 211.612 я 73

© ГОУ ВПО «Дальневосточный государственный университет путей сообщения» (ДВГУПС), 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	6
1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ.....	7
2. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ.....	9
2.1. Краткие теоретические сведения.....	9
2.2. Практическое занятие № 1. Переходные процессы в электрических цепях. Определение начальных условий и принужденных составляющих токов и напряжений.....	12
2.3. Практическое занятие № 2. Переходные процессы в электрических цепях. Составление характеристического уравнения	17
2.4. Практическое занятие № 3. Переходные процессы в электрических цепях. Расчет переходного процесса в цепях первого порядка	20
2.5. Практическое занятие № 4. Некорректная коммутация.....	26
2.6. Практическое занятие № 5. Расчет переходного процесса в цепях второго порядка классическим методом.....	30
3. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ	38
3.1. Краткие теоретические сведения.....	38
3.2. Практическое занятие № 6. Расчет переходных процессов операторным методом. Методика составления операторных схем замещения.....	41
3.3. Практическое занятие № 7. Расчет переходных процессов операторным методом. Определение оригиналов токов и напряжений по известным изображениям	46
3.4. Практическое занятие № 8. Теоретическое и экспериментальное исследование переходных процессов ..	51
4. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ	54
4.1. Краткие теоретические сведения.....	54
4.2. Практическое занятие № 9. Расчет переходных процессов частотным методом	56
5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ПАКЕТОВ ЭВМ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ	61
5.1. Общие сведения	61
5.2. Практическое занятие № 10. Использование программы Electronics Workbench (EWB) версия 5.12 для экспериментального исследования переходных процессов в сложных электрических цепях.....	62

5.3. Практическое занятие № 11. Использование программы Mathcad
для экспериментального исследования
переходных процессов в сложных
электрических цепях 64

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ..... 69

ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... 70

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. СХЕМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ДЛЯ
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ..... 71

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ТАБЛИЦА ОРИГИНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ
ПО ЛАПЛАСУ 76

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ТАБЛИЦА ФУНКЦИЙ И ИХ ЧАСТОТНЫХ СПЕКТРОВ.. 77

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК..... 80

ВВЕДЕНИЕ

В инженерной практике будущий специалист в области электроэнергетики и электромеханики должен уметь решать задачи, связанные с переходными процессами в электрических цепях. Расчет переходных процессов в электрических цепях, как показывает опыт, один из самых трудных для понимания разделов теоретических основ электротехники. Без приобретения практических навыков решения задач успешное усвоение данного раздела невозможно.

Цель предлагаемого практикума оказать помощь как студентам в их самостоятельной работе, так и преподавателям, ведущим практические занятия по теоретическим основам электротехники, поэтому пособие представлено в виде методических разработок практических занятий.

При проведении практических занятий преследуется цель так организовать работу в группе, чтобы каждый студент работал самостоятельно. Для этого в начале занятия преподаватель совместно со студентами рассматривает решение типовой задачи, а затем каждому студенту выдается индивидуальное задание. Перед каждым практическим занятием авторы рекомендуют студентам ознакомиться с теорией переходных процессов по материалу, изложенному на лекциях, в данном пособии и в [1–7].

В пособии рассмотрены и вопросы, касающиеся применения прикладных пакетов ЭВМ к расчету переходных процессов.

Авторы выражают благодарность доценту кафедры «Электротехника, электроника и электромеханика» Дальневосточного государственного университета путей сообщения В. С. Матющенко за ценные замечания и полезные рекомендации.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

$t = 0_-$	– момент времени непосредственно перед коммутацией или сокращенно указывается как момент времени до коммутации;
$t = 0$	– момент коммутации;
$t \rightarrow \infty$	– момент времени, когда в цепи после завершения переходного процесса будет наблюдаться установившийся режим;
$i(0_-), u(0_-)$	– значения тока и напряжения до коммутации соответственно;
$i(0), u(0)$	– значения тока и напряжения в момент коммутации соответственно;
$i_{св}, u_{св}$	– свободные составляющие тока и напряжения соответственно;
$i_{пр}, u_{пр}$	– принужденные составляющие тока и напряжения соответственно.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССАХ

В устройствах производства, передачи и преобразования электрической энергии, в установившемся режиме, токи и напряжения всех ветвей электрической цепи изменяются по периодическому закону или сохраняют неизменные значения. Всякое изменение топологии цепи или параметров входящих в нее элементов нарушает характер токов и напряжений, т. е. приводит к тому, что режим работы цепи становится неустановившимся.

Любое изменение режима работы электрической цепи (включение, выключение, переключение каких-либо элементов) называется **коммутацией**, считается, что она происходит мгновенно. Неустановившиеся процессы, которые имеют место в цепи при переходе от одного установившегося режима к другому, называются **переходными**.

Во время переходных процессов величины токов в отдельных ветвях и напряжения на отдельных элементах могут в несколько раз превышать значения, соответствующие установившемуся режиму.

При расчете переходных процессов начало отсчета времени переходного процесса совмещают с моментом коммутации, причем через $t = 0_-$ обозначают момент времени, непосредственно предшествующий коммутации, а через $t = 0$ – момент времени, следующий непосредственно за коммутацией (начальный момент времени после коммутации).

При рассмотрении переходных процессов исключается электрическая дуга, которая возникает при включении и выключении. Чтобы исключить влияние электрической дуги будем считать, что ключ замыкается или размыкается мгновенно, и в момент $t = 0$ коммутация уже произошла.

Переход реальной электрической цепи от одного установившегося режима к другому не может происходить мгновенно, скачком. Это объясняется тем, что каждому установившемуся состоянию соответствует определенное значение энергии, запасенной в электрическом и магнитном полях. Скачкообразный переход от одного установившегося режима к другому потребовал бы скачкообразного изменения запасенной энергии, что возможно, только если источники энергии обладают бесконечно большой мощностью. В связи с тем, что любой реальный источник энергии может отдавать только конечную мощность, суммарная энергия, запасенная в цепи, может изменяться только плавно, из этого следуют два закона коммутации.

Первый закон коммутации: ток в ветви, содержащей катушку индуктивности, а также магнитный поток, возникающий в результате изменения тока, при коммутации сохраняют те значения, которые они имели до коммутации.

Второй закон коммутации: напряжение и заряд на конденсаторе при коммутации сохраняют те значения, которые они имели до коммутации.

Математически законы коммутации можно записать следующим образом:

$$i_L(0) = i_L(0_-);$$

$$u_C(0) = u_C(0_-).$$

Законы коммутации могут не выполняться в цепях, имеющих узлы с ветвями, содержащими только емкости и источники тока, или контуры с ветвями, содержащими только индуктивности и источники напряжения. Коммутация в таких цепях называется **некорректной**.

Определение начальных условий при некорректной коммутации производят, используя **принцип непрерывности магнитного потока** и **закон сохранения электрического заряда**.

Принцип непрерывности магнитного потока – магнитный поток сквозь произвольно замкнутую поверхность равен нулю: $\text{div} B = 0$. В линейных электрических цепях магнитный поток L -элемента определяется потокоцеплением, поэтому можно записать: $\sum \Psi(0) = \sum \Psi(0_-)$.

Закон сохранения электрического заряда – алгебраическая сумма электрических зарядов тел или частиц, образующих электрически изолированную систему, не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе: $\sum q(0) = \sum q(0_-)$.

Основными методами анализа переходных процессов в линейных цепях являются:

- 1) **классический метод**, заключающийся в непосредственном интегрировании дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитное состояние цепи;
- 2) **операторный метод**, заключающийся в решении системы алгебраических уравнений относительно изображений искомых переменных с последующим переходом от найденных изображений к оригиналам;
- 3) **частотный метод**, основанный на преобразовании Фурье и находящий широкое применение при решении задач синтеза;
- 4) метод расчета с помощью **интеграла Дюамеля**, используемый при сложной форме кривой возмущающего воздействия;
- 5) **метод переменных состояний**, представляющий собой упорядоченный способ определения электромагнитного состояния цепи на основе решения системы дифференциальных уравнений первого порядка, записанных в форме Коши.

В настоящем пособии рассматриваются первые три метода анализа переходных процессов, возникающих в линейных электрических цепях.

2. КЛАССИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

2.1. Краткие теоретические сведения

В основе классического метода расчета переходных процессов в электрических цепях лежит составление интегрально-дифференциальных уравнений для мгновенных значений токов и напряжений. Эти уравнения составляют для схем, полученных после коммутации, основываясь на известных методах расчета электрических цепей, таких как метод непосредственного применения законов Кирхгофа, метод контурных токов, метод узловых потенциалов. Решение полученной системы уравнений относительно выбранной переменной и составляет сущность классического метода.

При этом падение напряжений в активных сопротивлениях r и на реактивных элементах: конденсаторе C и катушке индуктивности L определяются соответственно:

$$u_r = ir ,$$

$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt ,$$

$$u_L = L \frac{di}{dt} .$$

Учитывая, что решение дифференциальных уравнений проще интегрально-дифференциальных, полученную систему сводят к одному дифференциальному уравнению относительно выбранной переменной.

Порядок дифференциального уравнения равен числу **независимых накопителей энергии** в цепи, под которыми понимаются катушки индуктивности и конденсаторы в упрощенной схеме, получаемой из исходной путем объединения индуктивностей и соответственно емкостей элементов, соединения между которыми являются последовательными или параллельными.

В общем случае порядок дифференциального уравнения определяется соотношением:

$$m = m_L + m_C - k_L - k_C ,$$

где m_L и m_C – число катушек индуктивности и конденсаторов соответственно после указанного упрощения исходной схемы; k_L – число узлов, в которых сходятся только ветви, содержащие катушки индуктивности (в соответствии с первым законом Кирхгофа ток через любую катушку индуктивности в этом случае определяется токами через остальные катушки); k_C – число контуров схемы, ветви которых содержат только конденсаторы (в соответствии со вторым законом Кирхгофа напряжение на любом из конденсаторов в этом случае определяется напряжениями на других).

Обозначим искомую функцию времени (напряжение, ток, потокосцепление и т. п.) через $x = x(t)$, тогда дифференциальное уравнение m -го по-

ряда, описывающее переходный процесс в электрической цепи, находящейся под воздействием источника $f(t)$, имеет вид:

$$b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x = f(t), \quad (1)$$

где $b_0, b_1, \dots, b_{m-1}, b_m$ – коэффициенты, зависящие от параметров цепи (в дальнейшем будем рассматривать цепи только с постоянными параметрами); $f(t)$ – функция, описывающая характер воздействия на цепь.

Дифференциальное уравнение (1) относится к линейным неоднородным уравнениям m -го порядка. Как известно из курса высшей математики, его решение есть сумма общего решения $x_{св}$ однородного дифференциального уравнения m -го порядка:

$$b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x = 0$$

и частного решения $x_{пр}$ уравнения (1)

$$x = x_{св} + x_{пр}.$$

Частное решение данного неоднородного уравнения, получаемое с учетом внешнего воздействия $f(t)$, называется принужденной составляющей решения $x_{пр}$ и определяется из соотношений для установившегося режима данной цепи после коммутации.

Общее решение однородного уравнения определяет процессы, которые протекают в цепи без участия внешнего воздействия $f(t)$, и называется свободной составляющей $x_{св}$. Вид свободной составляющей переходного процесса определяется числом и значениями корней характеристического уравнения:

$$b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0 = 0.$$

В случае, когда корни $p_1, p_2, \dots, p_m$ характеристического уравнения вещественные и различные, решение имеет вид:

$$x_{св} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_m e^{p_m t},$$

где $A_1, A_2, \dots, A_m$ – постоянные интегрирования, которые находятся из начальных условий задачи.

В случае, когда корни уравнения – вещественные и равные, т. е. $p_1 = p_2 = \dots = p_m = p$, свободная составляющая определяется уравнением:

$$x_{св} = (A_1 + A_2 t + A_3 t^2 + \dots + A_m t^{m-1}) e^{pt}.$$

Если корни комплексно-сопряженные $p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega$, тогда решение имеет вид:

$$x_{св} = A e^{\alpha t} \sin(\omega t + \psi),$$

где A и ψ – постоянные интегрирования, определяемые также из начальных условий задачи.

В табл. 1 обобщены данные для определения свободных составляющих дифференциального уравнения m -го порядка.

Таблица 1

**Выражения для свободных составляющих
общего решения неоднородного дифференциального уравнения**

Вид корней характеристического уравнения	Выражение для свободной составляющей
Корни $p_1, p_2, \dots, p_m$ вещественные и различные	$x_{св} = \sum_{k=1}^m A_k e^{p_k t}$
Корни $p_1, p_2, \dots, p_m$ вещественные и $p_1 = p_2 = \dots = p_n = p$ ($n < m$)	$x_{св} = \sum_{k=1}^n A_k t^{n-1} e^{p_k t} + \sum_{k=n+1}^m A_k e^{p_k t}$
Пары комплексно-сопряженных корней $p_{k,k+1} = -\alpha_k \pm j\omega_k$	$x_{св} = A_k e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \psi_k)$

Примечание. A_k, ψ_k – постоянные интегрирования.

Начальные условия задачи определяют значения токов в индуктивностях $i_L(0)$ и напряжений на емкостях $u_C(0)$ в момент коммутации. В зависимости от начального энергетического состояния цепи различают два типа задач расчета переходных процессов: задачи с нулевыми начальными условиями, когда непосредственно в момент коммутации $i(0) = 0$; $u(0) = 0$ и задачи с ненулевыми начальными условиями, когда $i(0) \neq 0$ и (или) $u(0) \neq 0$.

Нулевые и ненулевые значения начальных условий для тока в катушке индуктивности i_L и напряжения на конденсаторе u_C называются **независимыми**. Для определения независимых начальных условий в цепи до коммутации ($t = 0_-$) любым известным способом рассчитываем токи в индуктивностях и напряжения на емкостях. Согласно законам коммутации полученные значения и будут являться независимыми начальными условиями. Начальные условия остальных токов и напряжений называются **зависимыми**. Чтобы определить их, для цепи, образованной после коммутации, составляют уравнения Кирхгофа и записывают эти уравнения для момента коммутации $t = 0$ с учетом законов коммутации. Полученную систему алгебраических уравнений решают относительно искомых величин при $t = 0$.

Если число корней характеристического уравнения больше одного, то необходимо иметь не только начальные условия искомой переменной, но и ее производных. При этом порядок производных, начальное значение которых необходимо знать, на единицу меньше числа корней характеристического уравнения. Для определения производных при $t = 0$ уравнения Кирхгофа дифференцируют и решают совместно для $t = 0$.

Данный метод применяют для решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка. При более высоких порядках определение постоянных интегрирования и решение характеристического уравнения представляет собой сложный процесс.

2.2. Практическое занятие № 1.

Переходные процессы в электрических цепях.

Определение начальных условий

и принужденных составляющих токов и напряжений

Цель: получить навыки определения начальных условий и установившихся токов и напряжений, построения временных зависимостей токов и напряжений на основе качественного анализа цепи.

Порядок проведения занятия

1. Контроль знаний основных теоретических положений по расчету переходных процессов, изложенных на лекции и в учебниках [1–4].
2. Решение типовых задач совместно со студентами.
3. Самостоятельное решение каждым студентом индивидуальных задач.
4. Контроль за самостоятельной работой студентов.
5. Обсуждение наиболее сложных вопросов и разбор типичных ошибок.

Проверка знаний основных теоретических положений

1. Сформулируйте законы Ома и Кирхгофа для электрической цепи.
2. Что вы понимаете под коммутацией в электрической цепи?
3. Назовите законы коммутации и запишите их математически.
4. Объясните следующие понятия: начальные условия задачи, нулевые и ненулевые начальные условия, зависимые и независимые условия.

Примеры для совместного решения со студентами типовых задач

Пример 1.1.

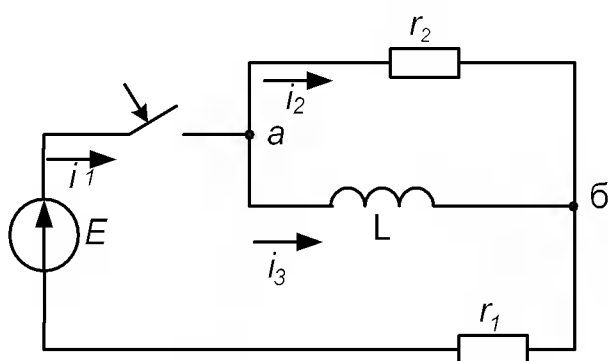


Рис. 1. Расчетная схема к примеру 1.1

В цепи (рис. 1) $E = 60$ В, $r_1 = 5$ Ом, $r_2 = 10$ Ом. В момент времени $t = 0$ замыкается ключ. Требуется определить токи цепи и напряжение на участке **аб** (u_{ab}) в моменты времени $t = 0_-$, $t = 0$, $t \rightarrow \infty$. На основе качественного анализа цепи построить зависимости указанных величин от времени.

Решение

До коммутации цепь не подключена к источнику ЭДС, поэтому при $t = 0_-$ $i_1(0_-) = i_2(0_-) = i_3(0_-) = 0$ и $u_{ab}(0_-) = r_2 i_2(0_-) = 0$.

В момент коммутации при $t=0$ по первому закону коммутации ток в индуктивности $i_3(0) = i_3(0_-) = 0$. Следовательно, токи

$$i_1(0) = i_2(0) = E / (r_1 + r_2) = 60 / 15 = 4 \text{ A},$$

По закону Ома напряжение на участке **аб** – $u_{ab}(0) = r_2 i_2(0) = 10 \cdot 4 = 40 \text{ В}$.

При $t \rightarrow \infty$ режим в цепи – установившийся. Для постоянного тока индуктивное сопротивление $x_L = \omega L = 0 \cdot L = 0 \text{ Ом}$, т. е. сопротивление r_2 коротко замкнуто ветвью с индуктивностью, и цепь приобретает конфигурацию, приведенную на рис. 2:

Для послекоммутационного принужденного режима

$$i_2(\infty) = 0 \text{ A}$$

$$u_{ab}(\infty) = r_2 i_2(\infty) = 0 \text{ В},$$

$$i_1(\infty) = i_3(\infty) = \frac{E}{r_1} = \frac{60}{5} = 12 \text{ A}.$$

Таким образом, после замыкания ключа (при $t = 0$) токи i_1 и i_2 скачком увеличиваются от нуля до значения $i_1(0) = i_2(0) = 4 \text{ A}$. Как следует из первого закона коммутации, ток i_3 в индуктивности в момент $t = 0$ остается равным нулю, но с течением времени он увеличивается и в установившемся режиме $i_3(\infty) = i_1(\infty) = 12 \text{ A}$. При этом $i_1(\infty) > i_1(0)$, так как в установившемся режиме сопротивление r_2 замкнуто коротко ветвью с индуктивностью. Ток i_2 в короткозамкнутой ветви уменьшается от значения, равного 4 А в момент коммутации, до нуля при установившемся режиме. Напряжение на участке **аб** до коммутации равно нулю, в момент коммутации скачком изменяется до 40 В, а затем с течением времени плавно изменяется до нуля. Зависимости $i_1(t)$; $i_2(t)$; $i_3(t)$; $u_{ab}(t)$ показаны на рис. 3.

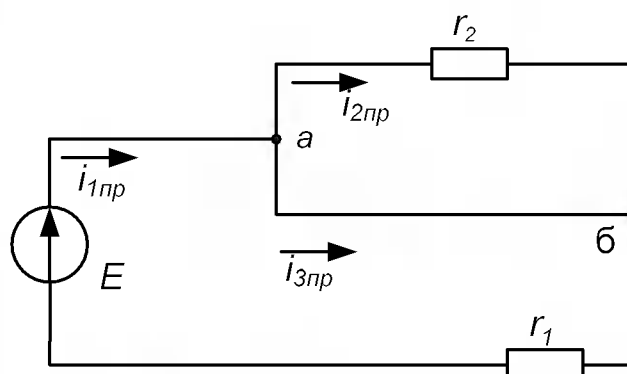


Рис. 2. Схема, соответствующая послекоммутационному принужденному режиму

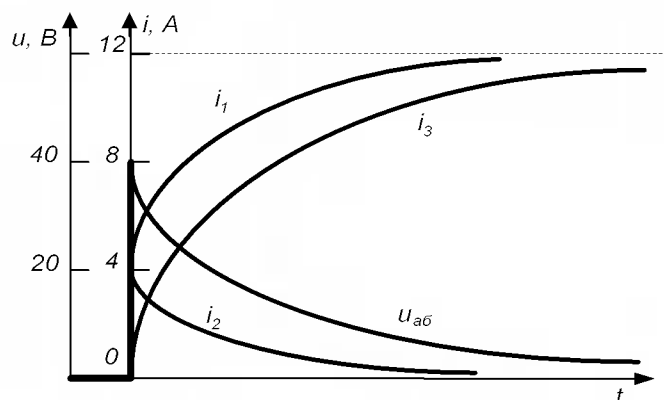


Рис. 3. Кривые изменения токов и напряжения на участке **аб** в цепи

Пример 1.2.

Для цепи (рис. 4) дано $E = 150$ В, $r_1 = r_2 = r_3 = 10$ Ом. В момент коммутации $t = 0$ ключ размыкается.

Определить значения токов i_1, i_2, i_3 и напряжения $u_{a\delta}$ в моменты времени $t = 0_-, t = 0, t \rightarrow \infty$. Построить зависимости $i_1(t), i_2(t), i_3(t), u_{a\delta}(t)$.

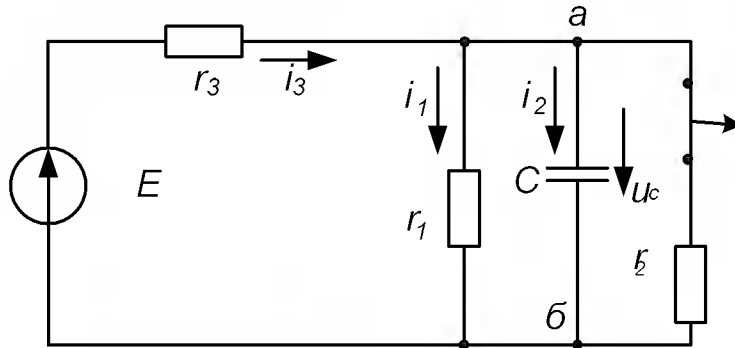


Рис. 4. Расчетная схема примера 1.2

Решение

До коммутации (ключ замкнут) при $t = 0_-$ ток

$$i_3(0_-) = \frac{E}{r_3 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} = \frac{150}{10 + \frac{10 \cdot 10}{10 + 10}} = 10 \text{ А.}$$

По второму закону Кирхгофа

$$r_3 i_3(0_-) + u_{a\delta}(0_-) = E, \text{ откуда}$$

$$u_{a\delta}(0_-) = E - r_3 i_3(0_-) = 150 - 10 \cdot 10 = 50 \text{ В.}$$

$$\text{Ток } i_1(0_-) = \frac{u_{a\delta}(0_-)}{r_1} = \frac{50}{10} = 5 \text{ А.}$$

Ток $i_2(0_-) = 0$, так как ветвь с емкостью постоянный ток не проводит.

После коммутации (ключ разомкнут) отключена ветвь с сопротивлением r_2 . При $t = 0$ по второму закону коммутации $u_{a\delta}(0_-) = u_{a\delta}(0) = 50$ В, так как напряжение $u_{a\delta}$ равно напряжению u_C на емкости C .

$$\text{Следовательно, } i_1(0) = \frac{u_{a\delta}(0)}{r_1} = \frac{50}{10} = 5 \text{ А.}$$

По второму закону Кирхгофа $r_3 i_3(0) + u_{a\delta}(0) = E$, откуда $r_3 i_3(0) = E - u_{a\delta}(0) = 150 - 50 = 100$ В и по закону Ома ток

$$i_3(0) = \frac{100}{r_3} = \frac{100}{10} = 10 \text{ А.}$$

По первому закону Кирхгофа $i_2(0) = i_3(0) - i_1(0) = 10 - 5 = 5$ А.

В установившемся режиме, при $t \rightarrow \infty$, ток $i_2(\infty) = 0$, так как в ветви с емкостью постоянный ток равен нулю. Ток $i_1(\infty) = i_3(\infty) = \frac{E}{r_1 + r_3} = \frac{150}{10 + 10} = 7,5$ А (через сопротивления r_1 и r_3 проходит один и тот же ток).

Напряжение $u_{ab}(\infty) = r_1 i_1(\infty) = 10 \cdot 7,5 = 75$ В.

Зависимости $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$, $u_{ab}(t)$ показаны на рис. 5.

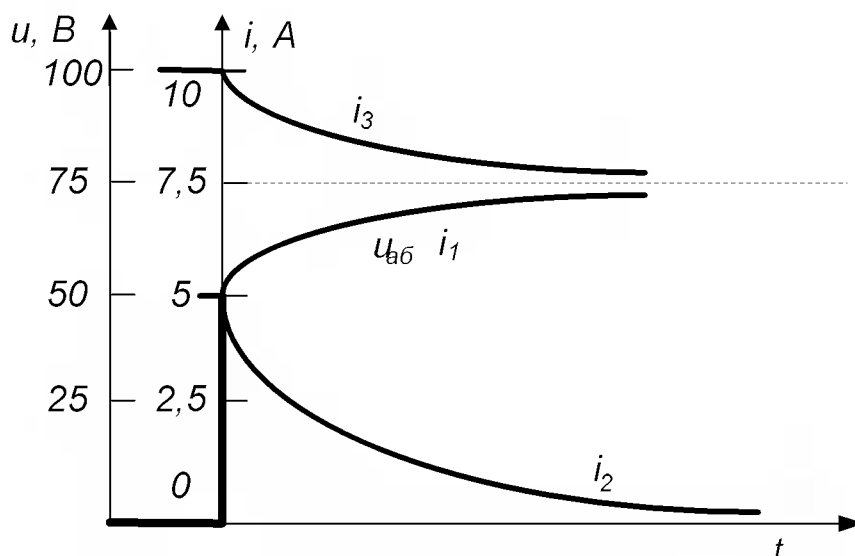


Рис. 5. Общий вид кривых изменений токов и напряжения на участке аб в цепи (рис. 4)

Пример 1.3.

Определить начальные значения напряжения на катушке индуктивности и ток через ёмкость в цепи (рис. 6), если $U_0 = 200$ В; $r_1 = 100$ Ом; $r_2 = 100$ Ом, $r_3 = 50$ Ом.

Решение

Запишем систему уравнений для момента времени $t = 0$ (сразу после замыкания ключа) по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_1(0) = i_2(0) + i_3(0), \\ i_1(0)r_1 + i_2(0)r_2 + u_L(0) = U_0, \\ i_1(0)r_1 + i_3(0)r_3 + u_C(0) = U_0. \end{cases}$$

В системе уравнений подчеркнуты независимые начальные условия.

Ток через индуктивность и напряжение на ёмкости:

$$i_2(0) = i_2(0_-) = 0,$$

$$u_C(0) = u_C(0_-) = U_0 = 200 \text{ В.}$$

Преобразуем исходную систему уравнений для определения начальных условий:

$$[i_2(0) + i_3(0)]r_1 + i_2(0)r_2 + u_L(0) = U_0,$$

$$[i_2(0) + i_3(0)]r_1 + i_3(0)r_3 + u_C(0) = U_0.$$

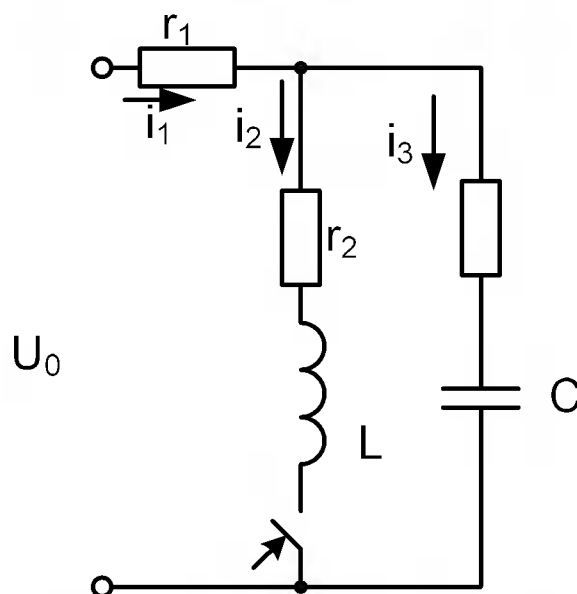


Рис. 6. Расчетная схема для примера 1.3

Из второго уравнения системы определим $i_3(0)$

$$i_3(0) = \frac{U_0 - u_C(0)}{r_1 + r_3} = \frac{200 - 200}{100 + 50} = 0 \text{ А.}$$

Из первого уравнения системы найдем $u_L = (0)$

$$u_L(0) = U_0 - i_3(0)r_1 = 200 - 0 \cdot 100 = 200 \text{ В.}$$

Таким образом, начальное значение тока через емкость равно 0 А, а напряжение на индуктивности 200 В.

Пример 1.4.

В схеме (рис. 7) $e(t) = \sin(\omega t)$, $r_1 = r_2 = 100 \text{ Ом}$, $L = 2 \text{ мГн}$, $f = 50 \text{ Гц}$.
Определить независимые начальные условия.

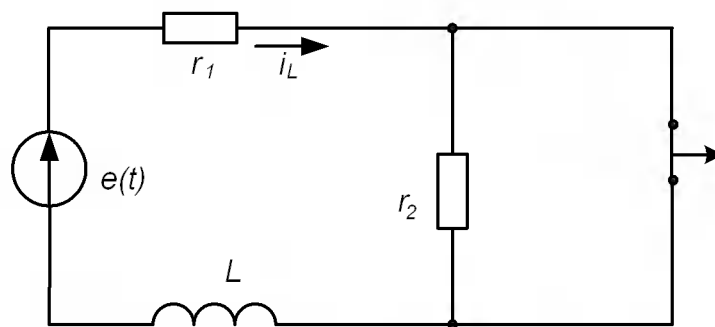


Рис. 7. Расчетная схема для примера 1.4

Решение

Для определения независимых начальных условий составим докоммутационную схему. Так как до коммутации сопротивление r_2 зашунтировано, то схема замещения примет вид, представленный на рис. 8.

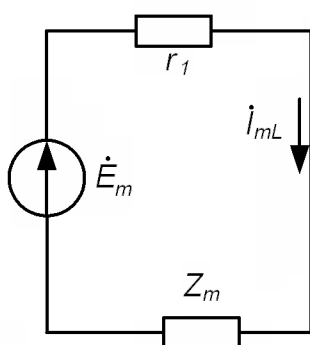


Рис. 8. Схема замещения для докоммутационного режима

В полученной комплексной схеме замещения определим ток $\dot{i}_{mL}$

$$\dot{i}_{mL} = \frac{\dot{E}_m}{r + jx_L} = \frac{1}{100 + j2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 2 \cdot 10^{-3}} = 3,2 \cdot 10^{-3} e^{-j0,40^\circ} \text{ Ом.}$$

Перейдем от комплексного амплитудного значения тока к мгновенному значению

$$i_L(t) = 3,2 \cdot 10^{-3} \sin(314t - 0,4^\circ) \text{ А.}$$

Определим независимые начальные условия, т. е. $i_L(0)$, рассмотрев $i_L(t)$ при $t = 0$:

$$i_L(0) = 3,2 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(0,4^\circ) = -2,23 \cdot 10^{-5} \text{ А.}$$

Самостоятельное решение студентами индивидуальных задач

Для самостоятельного решения предлагается 28 вариантов. Схемы и их параметры для каждого варианта приведены в прил. 1.

Студенту в соответствии с предложенным преподавателем вариантом для электрических цепей (прил. 1) требуется определить начальные условия и принужденную составляющую для i_L и u_C .

2.3. Практическое занятие № 2.

Переходные процессы в электрических цепях.

Составление характеристического уравнения

Цель: получить навыки составления характеристического уравнения методами «входного сопротивления» и «главного определителя».

Порядок проведения занятия

1. Контроль знаний основных теоретических положений по расчету переходных процессов, изложенных на лекции и в учебниках [1–4].
2. Решение типовых задач совместно со студентами.
3. Самостоятельное решение каждым студентом индивидуальных задач.
4. Контроль за самостоятельной работой студентов.
5. Обсуждение наиболее сложных вопросов и разбор типичных ошибок.

Проверка знаний основных теоретических положений

1. Сформулируйте и запишите с помощью математических символов законы коммутации.
2. Определите суть классического метода расчета переходных процессов в электрических цепях.
3. Что вы понимаете под характеристическим уравнением?
4. Зависит ли решение дифференциального уравнения от корней характеристического уравнения?
5. Какие способы составления характеристического уравнения вы знаете?
6. Может ли корень характеристического уравнения при переходных процессах быть величиной положительной? Ответ поясните.

Примеры для совместного решения со студентами типовых задач

Пример 2.1.

Для схемы (рис. 9) с параметрами $r = 100$ Ом, $L = 5$ мГн, $C = 10^{-6}$ Ф составить характеристическое уравнение, применяя метод «главного определителя», в приведенной форме. Вычислить коэффициент при среднем члене и свободный член уравнения. В момент времени $t = 0$ замыкается ключ.

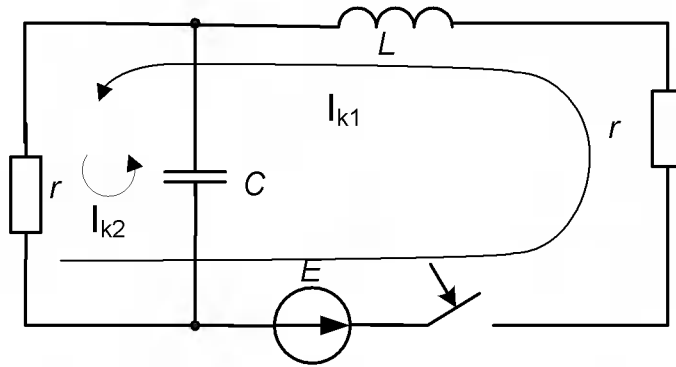


Рис. 9. Расчетная схема для примера 2.1

Решение

Метод состоит в том, что главный определитель системы уравнений, составленной по методу контурных токов или узловых потенциалов, приравнивают к нулю, реактивные элементы при этом заменяют следующим образом: $L \rightarrow Lp$, $C \rightarrow 1/Cp$.

Главный определитель системы уравнений для контурных токов в цепи с двумя независимыми контурами имеет вид:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{vmatrix},$$

где Z_{11} , Z_{22} – собственные сопротивления соответственно первого и второго контуров; $Z_{12} = Z_{21}$ – сопротивление ветви, через которую замыкаются оба контурных тока.

Для заданных контуров (рис. 9) и выбранных направлений токов

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 2r + pL & r \\ r & r + \frac{1}{pC} \end{vmatrix}.$$

Найдем и приравняем определитель $\Delta(p)$ к нулю:

$$2r^2 + rLp + \frac{2r}{Cp} + \frac{L}{C} - r^2 = 0,$$

в приведенном виде

$$p^2 + \frac{r^2C + L}{rLC}p + \frac{2}{LC} = 0.$$

Найдем коэффициент при среднем члене:

$$\frac{r^2C + L}{rLC} = \frac{r}{L} + \frac{1}{rC} = \frac{100}{5 \cdot 10^{-3}} + \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^4 + 10^4 = 3 \cdot 10^4$$

и свободный член уравнения

$$\frac{2}{LC} = \frac{2}{5 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-6}} = 4 \cdot 10^8.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$p^2 + 3 \cdot 10^4 p + 4 \cdot 10^8 = 0.$$

Пример 2.2.

Для условий примера 2.1 составить характеристическое уравнение методом «входного сопротивления», найти его корни.

Решение

Метод «входного сопротивления» состоит в решении уравнения $Z_{\text{ex}}(p) = 0$. Чтобы получить $Z_{\text{ex}}(p)$, необходимо в цепи после коммутации замкнуть все источники эдс, разомкнуть все ветви, содержащие источники тока, а реактивные элементы при этом заменить следующим образом: $L \rightarrow Lp$, $C \rightarrow 1/Cp$. Далее разрываем любую ветвь полученной цепи и определяем $Z_{\text{ex}}(p)$ со стороны обрыва.

Запишем выражение для входного сопротивления цепи $Z_{\text{ex}}(p)$ при размыкании первой ветви:

$$Z_{\text{ex}}(p) = r + \frac{(r + pL) \frac{1}{pC}}{r + pL + \frac{1}{pC}}.$$

Составим характеристическое уравнение, полагая $Z_{\text{ex}}(p) = 0$, т. е.

$$r + \frac{r + pL}{rpL + p^2LC + 1} = 0 \text{ или } r^2pC + rp^2LC + pL + 2p = 0.$$

В приведенном виде

$$p^2 + \frac{r^2C + L}{rLC} p + \frac{2}{LC} = 0.$$

Сравнивая последнее уравнение и характеристическое уравнение в приведенном виде, полученное в примере 2.1, можно сделать вывод, что независимо от того, какой метод используется для составления характеристического уравнения, итог будет один и тот же.

Следовательно, характеристическое уравнение имеет вид:
 $p^2 + 3 \cdot 10^4 p + 4 \cdot 10^8 = 0.$

Решая квадратное уравнение, найдем корни характеристического уравнения

$$p_{1,2} = \frac{-2b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \cdot 3 \cdot 10^4 \pm \sqrt{(3 \cdot 10^4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 10^8}}{2},$$

$$p_1 = -25000 \text{ c}^{-1}, \quad p_2 = -35000 \text{ c}^{-1}.$$

Самостоятельное решение студентами индивидуальных задач

Для электрических цепей (прил. 1) в соответствии с предложенным преподавателем вариантом:

- 1) преобразовать схему, заменив: а) катушку индуктивности L резистором с сопротивлением r ; б) конденсатор C резистором с сопротивлением r ;
- 2) для исходной схемы и двух полученных схем составить характеристические уравнения и найти их корни.

2.4. Практическое занятие № 3.

Переходные процессы в электрических цепях.

Расчет переходного процесса в цепях первого порядка

Цель: научить рассчитывать переходные процессы в rL - и rC -цепях при питании цепи от источника постоянной или синусоидальной эдс.

Порядок проведения занятия

1. Контроль знаний основных теоретических положений по расчету переходных процессов, изложенных на лекции и в учебниках [1–4].
2. Решение типовых задач совместно со студентами.
3. Самостоятельное решение каждым студентом индивидуальных задач.
4. Контроль за самостоятельной работой студентов.
5. Обсуждение наиболее сложных вопросов и разбор типичных ошибок.

Проверка знаний основных теоретических положений

1. Сформулируйте и запишите математически законы коммутации.
2. Что такое постоянная времени?
3. Какие методы определения постоянной времени вы знаете?
4. За какой промежуток времени переходный процесс считается завершённым?
5. Приведите пример возникновения аварийного режима в rL -цепи при коммутациях.
6. Назовите основные этапы расчета переходных процессов в электрических цепях первого порядка.

Примеры для совместного решения со студентами типовых задач

Пример 3.1.

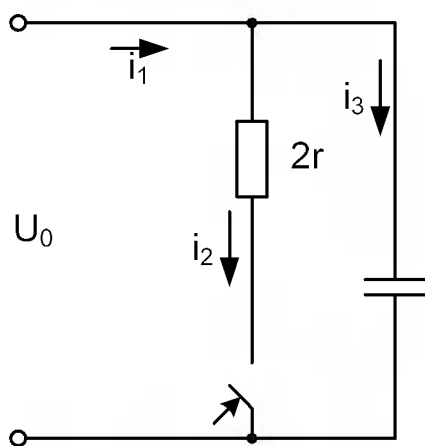


Рис. 10. Расчетная схема для примера 3.1

Рассчитать все токи в цепи и напряжение на конденсаторе после замыкания ключа (рис. 10), если $U_0 = 30$ В; $r = 100$ Ом; $C = 100$ мкФ.

Решение

Система уравнений, составленных по законам Кирхгофа для цепи после коммутации, имеет вид:

$$\begin{cases} i_1 = i_2 + i_3; \\ i_1 r + 2r i_2 = U_0; \\ -2r i_2 + u_C = 0. \end{cases}$$

Сводим систему к одному уравнению. За неизвестную величину примем напряжение

u_C , так как напряжение на ёмкости подчиняется закону коммутации

$$\begin{cases} (i_2 + i_3)r + 2ri_2 = U_0 \\ i_2 = \frac{u_C}{2r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3ri_2 + i_3r = U_0 \\ i_2 = \frac{u_C}{2r} \end{cases} \Rightarrow \frac{3u_C}{2} + i_3r = U_0.$$

Учитывая, что $i_3 = i_C = C \frac{du_C}{dt}$, получим дифференциальное уравнение

с одним неизвестным:

$$\frac{3u_C}{2} + Cr \frac{du_C}{dt} = U_0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$Cpr + \frac{3}{2} = 0. \quad (2)$$

Его корень $p = -\frac{3}{2Cr} = -\frac{3}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}} = -150 \text{ с}^{-1}$.

Решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$u_C = u_{C_{пр}} + u_{C_{св}} = u_{C_{пр}} + Ae^{pt}.$$

Из приведенного примера видно, что составление дифференциальных уравнений – процесс трудоемкий, поэтому решение дифференциального уравнения можно записывать сразу, без составления самого уравнения, в виде суммы принужденной и свободной составляющих. Вид свободной составляющей определим по виду корней характеристического уравнения. Найдем корни характеристического уравнения, используя метод входного сопротивления (см. подразд. 2.3, практическое занятие № 2).

Запишем входное сопротивление цепи после коммутации. Для этого замкнем источник эдс и разомкнем ветвь, содержащую сопротивление r ,

$$Z(p) = r + \frac{2r \frac{1}{pC}}{2r + \frac{1}{pC}}.$$

Приведем дробь к общему знаменателю:

$$Z(p) = \frac{2r^2 + \frac{r}{pC} + \frac{2r}{pC}}{2r + \frac{1}{pC}} = \frac{2r^2 pC + 3r}{2rpC + 1} = \frac{r(2rpC + 3)}{2rpC + 1}.$$

Приравняем $Z(p)$ к нулю ($Z(p) = 0$). Дробь равна нулю, когда числитель дроби будет равен нулю:

$$r(2rpC + 3) = 0 \text{ или } 2rpC + 3 = 0.$$

Получим характеристическое уравнение, аналогичное уравнению (2). Его корень

$$\rho = -\frac{3}{2Cr} = -\frac{3}{2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}} = -150 \text{ с}^{-1}.$$

Так, корень характеристического уравнения – один, он является действительным числом, следовательно, напряжение на конденсаторе будет изменяться по закону:

$$u_C = u_{C_{np}} + u_{C_{св}} = u_{C_{np}} + Ae^{\rho t}. \quad (3)$$

Принуждённое значение напряжения на ёмкости равно напряжению на резисторе $2r$:

$$u_{C_{np}} = u_{2m_{np}} = 2ri_{np} = 2r \frac{U_0}{r + 2r} = \frac{30 \cdot 2 \cdot 100}{100 + 200} = 20 \text{ В}.$$

Постоянную интегрирования A найдем из уравнения (3), записанного для $t = 0$:

$u_C(0) = u_{C_{np}}(0) + u_{C_{св}}(0)$, так как согласно законам коммутации $u_C(0) = U_0$, то $U_0 = u_{C_{np}} + A$; $30 = 20 + A$; $A = 10 \text{ В}$.

Напряжение на конденсаторе $u_C(t)$, В,

$$u_C(t) = 20 + 10e^{-150t}.$$

Ток $i_3(t)$, А, через конденсатор:

$$i_3(t) = C \frac{du_C}{dt} = 10^{-4} (-150) \cdot 10 \cdot e^{-150t} = -0,15e^{-150t}.$$

Ток i_2 , А, можно найти по закону Ома:

$$i_2(t) = \frac{u_C}{2r} = \frac{20 + 10e^{-150t}}{200} = 0,1 + 0,05e^{-150t}.$$

Ток в неразветвлённой части цепи $i_1(t)$, А, определим по первому закону Кирхгофа:

$$i_1(t) = i_2(t) + i_3(t) = -0,15e^{-150t} + 0,1 + 0,05e^{-150t} = 0,1 - 0,1e^{-150t}.$$

Пример 3.2.

В электрической цепи, схема которой приведена на рис. 11, замыкается ключ. Требуется определить токи в ветвях и напряжение на индуктивности, если параметры элементов цепи имеют следующие значения: $E = 30 \text{ В}$, $r_1 = r_2 = r_3 = 10 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$.

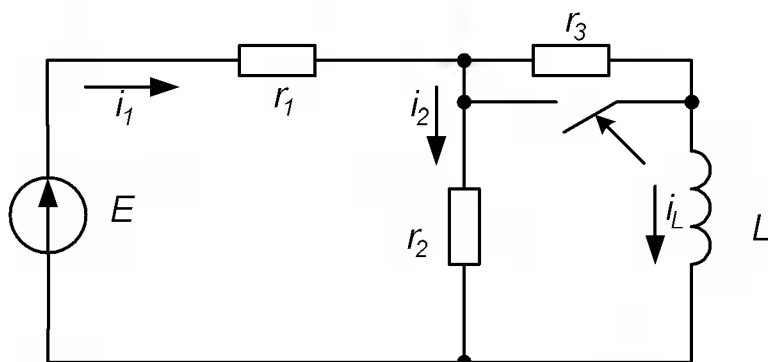


Рис. 11. Расчетная схема примера 3.2

Решение

Составим систему уравнений по законам Кирхгофа для схемы, полученной после коммутации

$$\begin{cases} -i_1 + i_2 + i_L = 0, \\ u_1 + u_2 = E, \\ u_2 - u_L = 0. \end{cases}$$

Выполнив взаимные подстановки и учитывая, что $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, получим дифференциальное уравнение для тока в индуктивности

$$\frac{L(r_1 + r_2)}{r_2} \frac{di_L}{dt} + r_1 i_L = E.$$

После подстановки в это уравнение значений параметров элементов, получим

$$\frac{di_L}{dt} + 50i_L = 150.$$

Решение этого неоднородного дифференциального уравнения состоит из двух частей $i_L = i_{L_{св}} + i_{L_{пр}}$, где принужденная составляющая тока определяется в установившемся режиме после коммутации и равна

$$i_{L_{пр}} = \frac{E}{r_1} = \frac{30}{10} = 3 \text{ А.}$$

Для определения свободной составляющей решим однородное дифференциальное уравнение

$$\frac{di_L}{dt} + 50i_L = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид $i_{L_{св}} = Ae^{pt}$, так как характеристическое уравнение $p + 50 = 0$, откуда найдем $p = -50 \text{ с}^{-1}$. Модуль этой величины характеризует скорость уменьшения свободной составляющей тока и называется коэффициентом затухания. Величина, обратная коэффи-

циенту затухания, имеет размерность времени и называется постоянной времени цепи $\tau_L = |1/p| = 0,02$ с.

Таким образом,

$$i_L = i_{L_{np}} + Ae^{pt} = 3 + Ae^{-50t}. \quad (4)$$

При определении постоянной интегрирования A воспользуемся законом коммутации, согласно которому $i_L(0_-) = i_L(0)$. Для вычисления тока $i_L(0_-)$ рассмотрим схему (рис. 12).

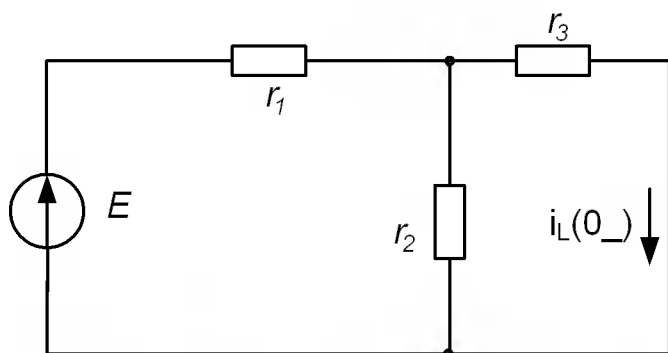


Рис. 12. Схема замещения электрической цепи, приведенной на рис. 11 для докоммутационного режима

На этой схеме индуктивность заменена проводником с нулевым сопротивлением, поэтому ток в ней рассчитаем по методу эквивалентного генератора, преобразуя ветви с источником напряжения E и сопротивлениями r_1 , r_2 к эквивалентному генератору с параметрами $E_{э\text{кв}}$ и $r_{э\text{кв}}$. Эквивалентное сопротивление генератора $r_{э\text{кв}}$ найдем как входное сопротивление двухполюсника

$$E_{э\text{кв}} = U_{\text{хх}} = ir_2 = \frac{E}{r_2 + r_1} r_2 = \frac{30}{10 + 10} \cdot 10 = 15 \text{ В},$$

$$r_{э\text{кв}} = r_{\text{вх}} = r_3 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 10 + \frac{10 \cdot 10}{10 + 10} = 15 \text{ Ом}.$$

Схемы для определения $E_{э\text{кв}}$ и $r_{э\text{кв}}$ представлены на рис. 13 и 14.

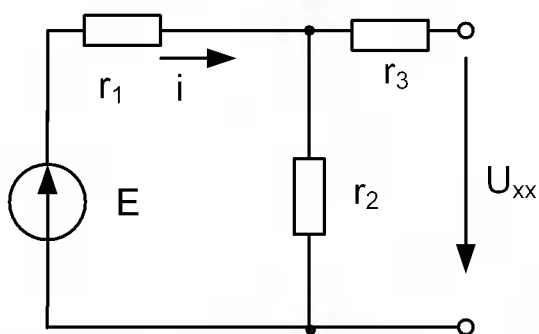


Рис.13. Схема для определения $E_{э\text{кв}}$

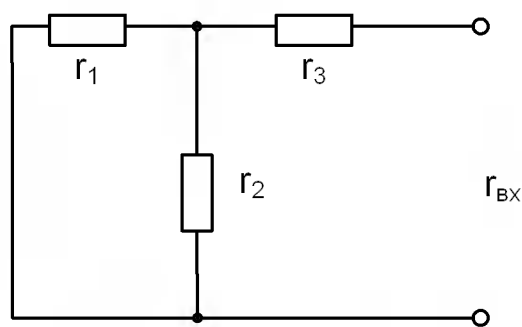


Рис.14. Схема для определения $r_{э\text{кв}}$

После определения $E_{\text{экв}}$ и $r_{\text{экв}}$ ток в индуктивности до коммутации определяется (рис. 15) по формуле

$$i_L(0_-) = \frac{E_{\text{экв}}}{r_{\text{экв}}} = \frac{15}{15} = 1 \text{ А.}$$

Подставив найденное значение в уравнение для полного тока в индуктивности при $t = 0$, получим

$$i_L(0) = i_{L\text{пр}} - A \Rightarrow A = 1 - 3 = -2 \text{ А.}$$

Окончательное решение

$$i_L(t) = 3 - 2e^{-50t}.$$

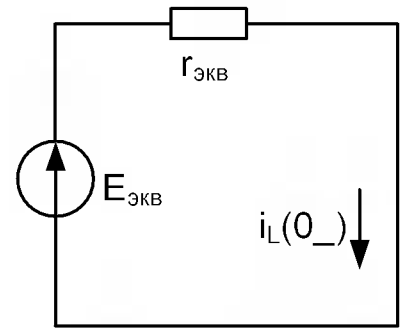


Рис. 15. Схема для определения $i_L(0_-)$

Напряжение на индуктивности u_L , В, определим по формуле

$$u_L = L \frac{di_L}{dt} = (-ALp)e^{pt} = (-2 \cdot 0,1(-50))e^{-50t} = 10e^{-50t}.$$

Токи в сопротивлениях, А, определим по формулам:

$$i_2 = \frac{u_L}{r_2},$$

$$i_1 = i_L + i_2 = (3 - 2e^{-50t}) + e^{-50t} = 3 - e^{-50t}.$$

Пример 3.3

Рассчитать ток в цепи (рис. 16) после размыкания ключа. В цепи действует синусоидальный источник напряжения u , В, $u = 100 \sin(314t - 45^\circ)$. Параметры цепи: $r_1 = 30 \text{ Ом}$; $r_2 = 70 \text{ Ом}$; $L = 0,2 \text{ Гн}$.

Решение

Индуктивное сопротивление цепи

$$\omega L = 314 \cdot 0,2 = 62,8 \text{ Ом.}$$

Комплексное сопротивление до коммутации:

$$\underline{Z}(0) = r_1 + j\omega L = 30 + j62,8 = 70e^{j64,5^\circ} \text{ Ом.}$$

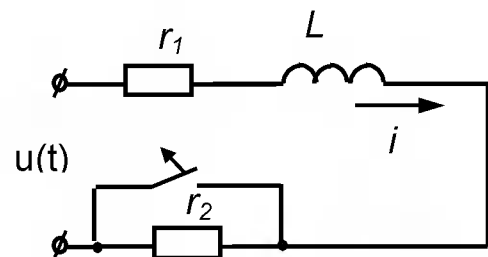


Рис. 16. Расчетная схема примера 3.3

Начальное значение тока (в первый момент после размыкания ключа) в соответствии с законом коммутации

$$i(0) = 1,44 \sin(-109,5^\circ) = -1,36 \text{ А.}$$

Характеристическое уравнение для цепи:

$$r_1 + r_2 + Lp = 0;$$

$$p = -\frac{r_1 + r_2}{L} = -\frac{100}{0,2} = -500 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно, в общем виде ток в цепи после коммутации:

$$i(t) = i_{пр}(t) + Ae^{pt}.$$

Принуждённое значение тока в цепи:

$$i_{мпр} = \frac{\dot{U}_m}{Z_{пр}} = \frac{\dot{U}_m}{r_1 + r_2 + j\omega\omega} = \frac{100e^{-j45^0}}{100 + j62,8} = \frac{100e^{-j45^0}}{118e^{j32,13^0}} = 0,85e^{-j77,1^0} \text{ А.}$$

При $t = 0$ имеем:

$$i(0) = i_{пр}(0) + A; \Rightarrow -1,36 = 0,85 \sin(-77,1^0) + A,$$

откуда:

$$A = -1,36 - 0,85 \sin(-77,1^0) = -0,53.$$

Ток в цепи $i(t)$, А, после размыкания ключа

$$i(t) = 0,85 \sin(314 t - 77,1^0) - 0,53e^{-500t}.$$

Самостоятельное решение студентами индивидуальных задач

Для электрических цепей (прил. 1) в соответствии с предложенным преподавателем вариантом:

- 1) преобразовать схему, заменив: а) катушку индуктивности L резистором с сопротивлением r , б) конденсатор C резистором с сопротивлением r ;
- 2) для двух полученных схем рассчитать токи в цепях и найти напряжения на конденсаторе и катушке индуктивности.

2.5. Практическое занятие № 4.

Некорректная коммутация

Цель: определить начальные и принужденные значения токов и напряжений при некорректной коммутации с использованием принципа непрерывности магнитного потока и закона сохранения электрического заряда.

Порядок проведения занятия

1. Контроль знаний основных теоретических положений по расчету переходных процессов, изложенных на лекции и в учебниках [1–4].
2. Решение типовых задач совместно со студентами.
3. Самостоятельное решение каждым студентом индивидуальных задач.
4. Контроль за самостоятельной работой студентов.
5. Обсуждение наиболее сложных вопросов и разбор типичных ошибок.

Проверка знаний основных теоретических положений

1. Назовите законы коммутации.
2. Определите причины возникновения переходных процессов в цепях с реактивными элементами.

3. Сформулируйте принцип непрерывности магнитного потока и закон сохранения электрического заряда.

4. Могут ли в момент коммутации в линейной электрической цепи с источниками энергии конечной мощности токи и напряжения на катушке индуктивности и конденсаторе изменяться скачком? Ответ обоснуйте.

5. Что подразумевается под некорректной коммутацией? Приведите пример некорректной коммутации.

Примеры для совместного решения со студентами типовых задач

Пример 4.1.

В цепи, схема которой приведена на рис. 17, размыкается ключ. Параметры элементов схемы $r_1 = r_2 = 100 \text{ Ом}$, $L_1 = L_2 = 0,1 \text{ Гн}$, $E = 100 \text{ В}$.

Определить ток в цепи после размыкания ключа и электромагнитную энергию, расходуемую в цепи при коммутации.

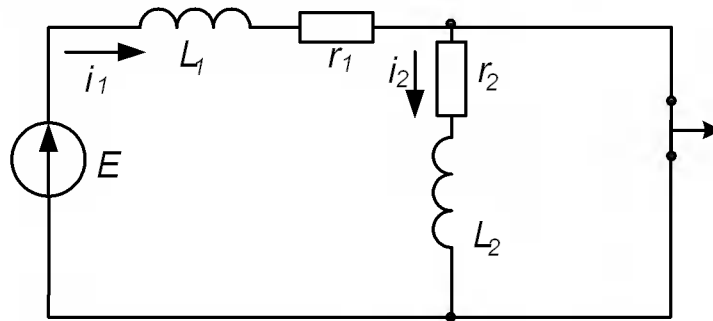


Рис. 17. Расчетная схема для примера 4.1

Решение

Из схемы следует, что до коммутации тока в индуктивности L_2 не было, так как она шунтировалась ключом, поэтому $i_2(0_-) = 0$. Однако после размыкания ключа ток в индуктивности L_2 будет равен току в индуктивности L_1 , который до коммутации был равен

$$i_1(0_-) = \frac{E}{r_1} = \frac{100}{100} = 1 \text{ А.}$$

Таким образом, токи в результате коммутации в индуктивностях должны мгновенно уравниваться и принять значение $i_1(0) = i_2(0) = i(0)$, которое определяется при помощи того, что $\sum \Psi(0) = \sum \Psi(0_-)$. Поскольку $\Psi = Li$, то получаем

$$L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-) = (L_1 + L_2) i(0).$$

Откуда следует, что

$$i(0) = \frac{L_1 i_1(0_-) + L_2 i_2(0_-)}{L_1 + L_2} = \frac{0,1 \cdot 1 + 0,1 \cdot 0}{0,1 + 0,1} = 0,5 \text{ А.}$$

Токи в индуктивностях после коммутации определяются уравнением

$$i = i_{св} + i_{пр}.$$

Значение принужденного тока определяется по формуле

$$i_{пр} = \frac{E}{r_1 + r_2} = \frac{100}{100 + 100} = 0,5 \text{ А.}$$

Характеристическое уравнение составим, используя метод входного сопротивления $Z(p) = 0$,

$$r_1 + r_2 + pL_1 + pL_2 = 0,$$

$$p = -\frac{r_1 + r_2}{L_1 + L_2} = \frac{100 + 100}{0,1 + 0,1} = -1000 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно, $i_{св} = Ae^{-1000t}$.

Определение постоянной интегрирования:

$$i(0) = A + i_{пр} \Rightarrow A = i(0) - i_{пр} \Rightarrow A = 0.$$

Таким образом, $i_{св} = 0$ и переходный процесс в цепи, несмотря на наличие в ней реактивных элементов, при выбранных параметрах отсутствует $i = i_{пр} = 0,5 \text{ А}$, что является некорректной постановкой задачи коммутации.

Интерес представляет энергия, которая расходуется в цепи при коммутации. До коммутации цепи энергия была накоплена только в индуктивности L_1 и имела значение

$$W(0_-) = \frac{L_1 i_1^2(0_-)}{2} = \frac{0,1 \cdot 1^2}{2} = 0,05 \text{ Дж.}$$

После коммутации

$$W(0) = \frac{(L_1 + L_2) i^2(0)}{2} = \frac{(0,1 + 0,1) \cdot 0,5^2}{2} = 0,025 \text{ Дж.}$$

В результате коммутации происходит уменьшение энергии в два раза. Эти потери энергии называют коммутационными и происходят они в элементах коммутации – механических или электронных ключах. Если потери очень большие, то это может сопровождаться разрушением элементов коммутации, обгоранием контактов механических элементов или пробоем элементов.

Пример 4.2.

На рис. 18 $E = 20 \text{ В}$, $L_1 = 0,1 \text{ Гн}$, $L_2 = 0,2 \text{ Гн}$, $r_1 = 40 \text{ Ом}$, $r_2 = 50 \text{ Ом}$.

В момент времени $t = 0$ размыкается ключ, и источник эдс отключается.

Определить токи i_1 , i_2 и напряжение u на резисторе r_1 при $t = 0_-$, $t = 0$.

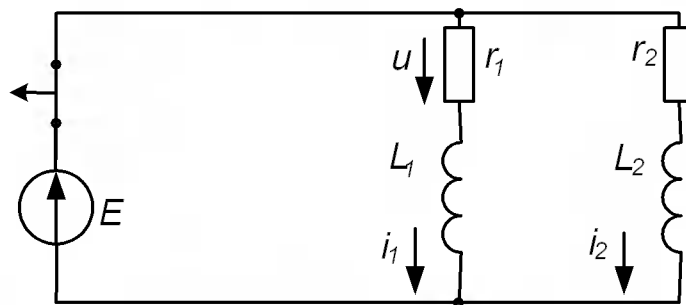


Рис. 18. Схема электрической цепи для примера 4.2

Решение

До коммутации при $t = 0_-$ токи определим по закону Ома

$$i_1(0_-) = \frac{E}{r_1} = \frac{20}{40} = 0,5 \text{ A},$$

$$i_2(0_-) = \frac{E}{r_2} = \frac{20}{50} = 0,4 \text{ A}.$$

Напряжение $u(0_-) = 20 \text{ В}$.

В момент времени $t = 0$ две индуктивности включены последовательно (рис. 19), хотя токи в них до коммутации были разные.

Для определения начальных значений токов $i_1(0)$, $i_2(0)$ применяем постоянство суммарного потокоцепления в контуре в моменты $t = 0_-$, $t = 0$.

Для цепи при выбранных направлениях токов после размыкания ключа (см. рис. 18) получим

$$L_1 i_1(0_-) - L_2 i_2(0_-) = (L_1 + L_2) i(0).$$

Знак минус в выражении появился вследствие того, что до коммутации при обходе данного контура один из токов по направлению не совпадал с выбранным направлением обхода контура.

Подставляя известные значения в последнюю формулу, получим $0,1 \cdot 0,5 - 0,2 \cdot 0,4 = (0,1 + 0,2) \cdot i(0)$, следовательно,

$$i(0) = \frac{0,1 \cdot 0,5 - 0,2 \cdot 0,4}{0,1 + 0,2} = 0,23 \text{ A}.$$

Напряжение на резисторе в момент коммутации

$$u(0) = r_1 \cdot i_1(0) = 40 \cdot (0,23) = 9,2 \text{ В}.$$

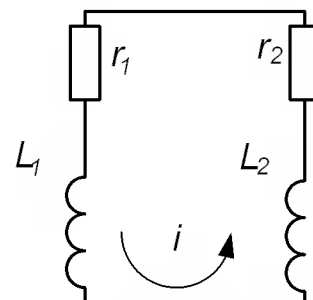


Рис. 19. Послекоммутационная схема рис. 15

Пример 4.3

На рис. 20 $E = 200 \text{ В}$, $r_1 = r_2 = 1 \text{ кОм}$, $C_1 = 2 \text{ мкФ}$, $C_2 = 8 \text{ мкФ}$.

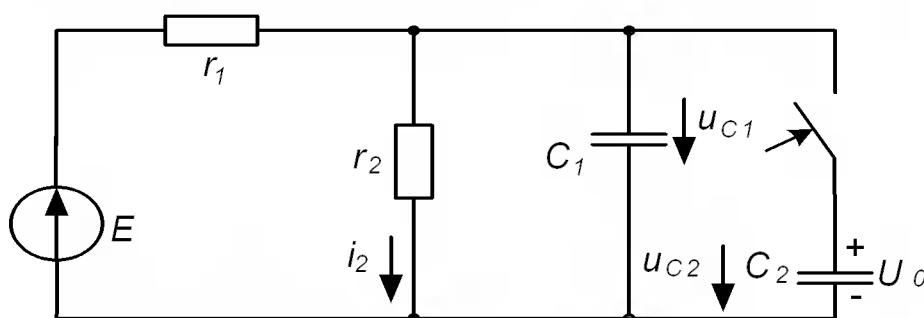


Рис. 20. Расчетная схема для примера 4.3

В момент времени $t = 0$ замыкается ключ и емкость C_2 , заряженная до 50 В, подключается параллельно емкости C_1 .

Определить ток i_2 и напряжения u_{C1} , u_{C2} при $t = 0_-$, $t = 0$.

Решение

До коммутации при $t = 0_-$

$$i_2(0_-) = \frac{E}{r_1 + r_2} = \frac{200}{1000 + 1000} = 0,1 \text{ А},$$

$$u_{C1}(0_-) = r_2 i_2(0_-) = 1000 \cdot 0,1 = 100 \text{ В},$$

$$u_{C2}(0_-) = U_0 = 50 \text{ В}.$$

В момент $t = 0$ емкость C_2 подключена параллельно емкости C_1 и, следовательно, $u_{C1}(0) = u_{C2}(0) = u_C(0)$.

Для расчета начального значения напряжения применим закон сохранения электрического заряда на параллельно включенных емкостях при $t = 0_-$, $t = 0$:

$$q_1(0_-) + q_2(0_-) = q_1(0) + q_2(0),$$

$$C_1 u_{C1}(0_-) + C_2 u_{C2}(0_-) = (C_1 + C_2) u_C(0).$$

При заданных численных значениях емкостей получим

$$2 \cdot 100 + 8 \cdot 50 = (2 + 8) \cdot u_C(0),$$

$$u_C(0) = 60 \text{ В},$$

$$i_2(0) = \frac{u_C(0)}{r_2} = \frac{60}{1000} = 0,06 \text{ А}.$$

Самостоятельное решение студентами индивидуальных задач

Для электрических цепей (прил. 1) в соответствии с предложенным преподавателем вариантом преобразовать схему таким образом, чтобы в полученной цепи наблюдалась некорректная коммутация и для полученной схемы рассчитать токи в цепях и найти напряжение на реактивном элементе.

2.6. Практическое занятие № 5.

Расчет переходного процесса в цепях второго порядка классическим методом

Цель: обобщить основные этапы анализа переходных процессов в линейных цепях с сосредоточенными параметрами классическим методом.

Порядок проведения занятия

1. Контроль знаний основных теоретических положений по расчету переходных процессов, изложенных на лекции и в учебниках [1–4].
2. Решение типовых задач совместно со студентами.
3. Самостоятельное решение каждым студентом индивидуальных задач.
4. Контроль за самостоятельной работой студентов.
5. Обсуждение наиболее сложных вопросов и разбор типичных ошибок.

Проверка знаний основных теоретических положений

1. Какая электрическая цепь является цепью второго порядка?
2. Приведите примеры электрических цепей первого, второго, третьего порядка.
3. Назовите основные этапы расчета переходных процессов в электрических цепях первого порядка.
4. В чем отличие расчета переходных процессов в цепях первого порядка от цепей второго порядка?
5. Какие методы нахождения корней характеристического уравнения вы знаете?
6. Запишите общий вид свободной составляющей тока или напряжения, если корни характеристического уравнения: а) равны и являются действительными числами; б) отличные один от другого действительные числа; в) комплексно сопряженные числа;
7. Как определить постоянную времени в цепях второго порядка?

Примеры для совместного решения со студентами типовых задач

Пример 5.1

Рассчитать напряжение на конденсаторе и ток в катушке в схеме, приведенной на рис. 21, при закорачивании сопротивления r_2 , если $E = 125$ В, $r_1 = 50$ Ом, $r_2 = 200$ Ом, $r_3 = 250$ Ом, $L = 10$ мГн, $C = 5$ мкФ.

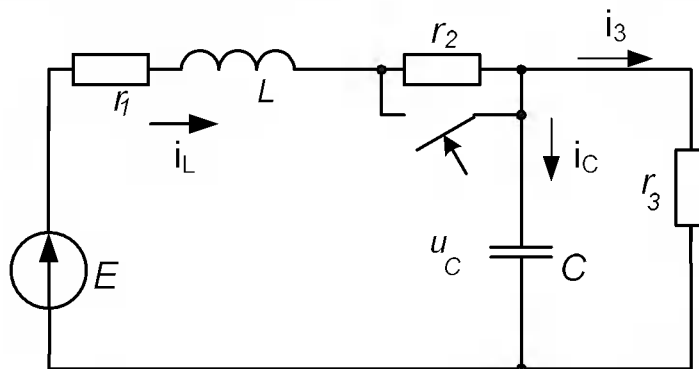


Рис. 21. Расчетная схема для примера 5.1

Решение

1. $t = 0_-$. Анализ цепи до коммутации:

$$i_L(0_-) = \frac{E}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{125}{50 + 200 + 250} = 0,25 \text{ А},$$

$$u_C(0_-) = i_L(0_-)r_3 = 0,25 \cdot 250 = 62,5 \text{ В}.$$

2. $t = 0$. Определение начальных условий.

По законам коммутации

$$i_L(0) = i_L(0_-) = 0,25 \text{ А},$$

$$u_C(0) = u_C(0_-) = 62,5 \text{ В.}$$

Для послекоммутационной цепи составим уравнения по законам Кирхгофа:

$$\begin{cases} i_L = i_C + i_3, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} E = u_L + i_L r_1 + u_C, \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} 0 = i_3 r_3 + u_C. \end{cases} \quad (7)$$

Из уравнения (6), записанного для момента $t = 0$, определим напряжение на катушке, а, решая совместно уравнения (5) и (7) для момента коммутации, найдем ток через конденсатор:

$$u_L(0) = E - i_L(0)r_1 - u_C = 125 - 0,25 \cdot 50 - 62,5 = 50 \text{ В,}$$

$$i_C(0) = i_L(0) - \frac{u_C(0)}{r_3} = 0,25 - \frac{62,5}{250} = 0 \text{ А.}$$

Используя уравнения связи $u_L = L \frac{di_L}{dt}$ и $i_C = C \frac{du_C}{dt}$, найдем скорости изменения тока на катушке индуктивности и напряжения на конденсаторе для момента времени $t = 0$. Это будет являться необходимым условием для нахождения постоянных интегрирования:

$$\left. \frac{di_L}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_L(0)}{L} = \frac{50}{0,01} = 5000 \text{ А/с,} \quad (8)$$

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = \frac{i_C(0)}{C} = \frac{0}{5 \cdot 10^{-6}} = 0 \text{ В/с.} \quad (9)$$

3. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения, составленного для цепи после замыкания ключа, может быть представлено в виде: $i_L = i_{Lпр} + i_{Lсв}$ или $u_C = u_{Cпр} + u_{Cсв}$.

4. $t \rightarrow \infty$. Определение принужденной составляющей:

$$i_{Lпр} = \frac{E}{r_1 + r_3} = \frac{125}{50 + 250} = 0,417 \text{ А,}$$

$$u_{Cпр} = i_{Lпр} \cdot r_3 = 0,417 \cdot 250 = 104 \text{ В.}$$

5. $0 < t < \infty$. Определение свободной составляющей.

Составим характеристическое уравнение по методу входного сопротивления. Для этого замыкаем накоротко источник эдс и размыкаем ветвь, содержащую конденсатор.

Схема для написания характеристического уравнения приведена на рис. 22.

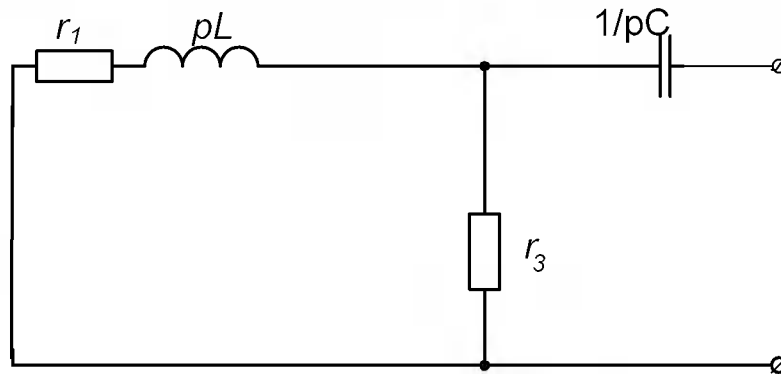


Рис. 22. Схема для написания характеристического уравнения в примере 5.1

Относительно разомкнутых зажимов определим сопротивление, заменяя элементы L на pL , C на $1/pC$

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + \frac{(pL + r_1)r_3}{pL + r_1 + r_3} = 0.$$

После того как полученное уравнение приведем к общему знаменателю и числитель приравняем к нулю, уравнение примет вид:

$$p^2 r_3 LC + p(L + Cr_3 r_1) + r_1 + r_3 = 0$$

или в приведенном виде

$$p^2 + p \frac{L + r_1 r_3 C}{r_3 LC} + \frac{r_1 + r_3}{L r_3 C} = 0. \quad (10)$$

Подставим в уравнение (10) численные значения:

$$p^2 + p \frac{10^{-2} + 50 \cdot 250 \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{250 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{-6}} + \frac{50 + 250}{10^{-2} \cdot 250 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 0,$$

$$p^2 + 5,8 \cdot 10^3 p + 2,4 \cdot 10^7 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, найдем его корни:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\omega = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5,8 \cdot 10^3 \pm \sqrt{(5,8 \cdot 10^3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2,4 \cdot 10^7}}{2} =$$

$$= -2900 \pm j3950 \text{ с}^{-1}.$$

Процесс носит колебательной характер, затухающий по экспоненциальному закону, а свободные составляющие примут вид:

$$i_{L_{св}} = A_i e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \psi_i) = A_i e^{-2900t} \sin(3950 t + \psi_i),$$

$$u_{C_{св}} = A_u e^{-\alpha t} \sin(\omega t + \psi_u) = A_u e^{-2900t} \sin(3950 t + \psi_u),$$

где α – коэффициент затухания; ω – угловая частота собственных колебаний в контуре.

6. Определение постоянных интегрирования. Уравнения для определения свободных составляющих содержат по две постоянных интегрирования: A_i – характеризует амплитуду искомой величины, ψ_i – ее начальную фазу.

Для нахождения A_i , ψ_i необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} i_L(t) = i_{L_{np}} + A_i e^{-2900t} \sin(3950 t + \psi_i), \\ \frac{di_L}{dt} = -2900 A_i e^{-2900t} \sin(3950 t + \psi_i) + 3950 A_i e^{-2900t} \cos(3950 t + \psi_i). \end{cases}$$

Запишем эти уравнения для момента времени $t = 0$, учитывая (8), получим:

$$\begin{cases} 0,25 = 0,417 + A_i \sin \psi_i, \\ 5000 = A_i (3950 \cos \psi_i - 2900 \sin \psi_i); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \psi_i = \frac{-0,167}{A_i}, \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} 3950 \cos \psi_i = \frac{5000}{A_i} + 2900 \frac{(-0,167)}{A_i}. \end{cases} \quad (12)$$

Из уравнения (12) выразим $\cos \psi_i$, а затем (11) разделим на (12), получим

$$\operatorname{tg} \psi_i = -0,146 \Rightarrow \psi_i = -8,3^\circ.$$

Подставляя в (11) значение $\psi_i = -8,3^\circ$, определим

$$A_i = \frac{-0,167}{\sin \psi_i} = \frac{-0,167}{\sin(-8,3^\circ)} = 1,16.$$

Уравнение для $i_L(t)$, A , имеет вид:

$$i_L(t) = 0,417 + 1,16 e^{-2900t} \sin(3950 t - 8,3^\circ).$$

Аналогично находятся A_u , ψ_u – необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} u_C(t) = u_{C_{np}} + A_u e^{-2900t} \sin(3590 t + \psi_u), \\ \frac{du_C}{dt} = A_u e^{-2900t} [3950 \cos(3590 t + \psi_u) - 2900 \sin(3590 t + \psi_u)] \end{cases}$$

Для момента времени $t = 0$, учитывая, что $\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{t=0} = 0$ В/с, получим:

$$\begin{cases} 62,5 = 104 + A_u \sin \psi_u, \\ 0 = A_u (3950 \cos \psi_u - 2900 \sin \psi_u). \end{cases}$$

Решая последнюю систему уравнений, найдем $\operatorname{tg} \psi_u = 1,362$, $\psi_u = 53,7^\circ$, $A_u = -51,49$ В.

Уравнение для $u_C(t)$, В, имеет вид:

$$u_C(t) = 104 - 51,49 e^{-2900t} \sin(3950t + 53,7^\circ).$$

Пример 5.2.

Найти начальные значения напряжения на катушках индуктивности после замыкания ключа (рис. 23), ток в катушке L_1 при $t \rightarrow \infty$, если: $U_0 = 100$ В; $r_1 = 20$ Ом; $r_2 = 10$ Ом, $L = L_1 = L_2 = 0,1$ Гн.

Решение

1. $t = 0_-$. Анализ цепи до коммутации

$$i_{L1}(0_-) = \frac{U_0}{r_1} = \frac{100}{20} = 5 \text{ А},$$

$$i_{L2}(0_-) = 0,$$

$$u_{L1}(0_-) = 0,$$

$$u_{L2}(0_-) = 0.$$

2. $t = 0$. Определение начальных условий.

По закону коммутации

$$i_{L1}(0) = i_{L1}(0_-) = 5 \text{ А},$$

$$i_{L2}(0) = i_{L2}(0_-) = 0 \text{ А}.$$

Составим уравнения по законам Кирхгофа

$$\begin{cases} i_{L1} = i - i_{L2}, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} U_0 = u_{L1} + i r_1, \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{cases} i r_1 - u_{L2} - i_{L2} r_2 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Для момента коммутации $t = 0$ из уравнения (13) найдем $i(0)$. Подставляя найденное значение в (14) и (15), определим $u_{L1}(0)$ и $u_{L2}(0)$:

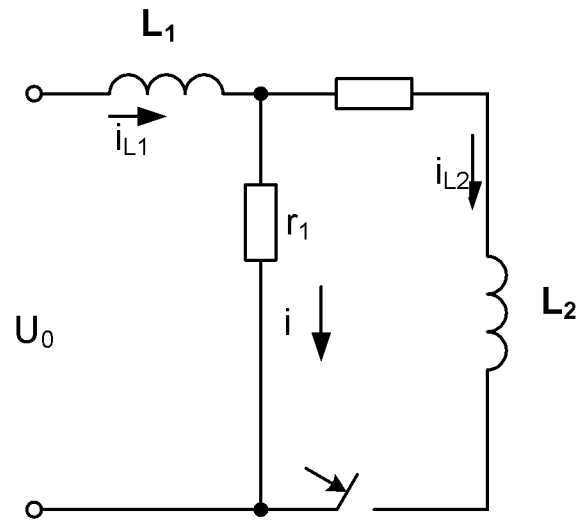


Рис. 23. Расчетная схема для примера 5.2

$$i(0) = i_{L1}(0) - i_{L2}(0) = 5 - 0 = 0 \text{ A},$$

$$u_{L1}(0) = U - i(0)r_1 = 100 - 5 \cdot 20 = 0 \text{ B},$$

$$u_{L2}(0) = ir_2 - i_{L2}r_2 = 5 \cdot 10 - 0 \cdot 10 = 50 \text{ B}.$$

Зная, что $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, найдем скорости изменения тока на катушках индуктивности для момента времени $t = 0$:

$$\left. \frac{di_{L1}}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_{L1}(0)}{L} = \frac{0}{0,1} = 0 \text{ A/c}, \quad (16)$$

$$\left. \frac{di_{L2}}{dt} \right|_{t=0} = \frac{u_{L2}(0)}{L} = \frac{50}{0,1} = 500 \text{ A/c}. \quad (17)$$

3. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения, составленного для цепи после замыкания ключа, может быть представлено в виде: $i_{L1} = i_{L1np} + i_{L1св}$.

4. $t \rightarrow \infty$. Определение принужденной составляющей:

$$i_{L1np} = \frac{U(r_1 + r_2)}{r_1 r_2} = \frac{100 \cdot (20 + 10)}{20 \cdot 10} = 15 \text{ A}.$$

5. $0 < t < \infty$. Определение свободной составляющей.

Составим характеристическое уравнение по методу входного сопротивления. Схема для написания характеристического уравнения приведена на рис. 24.

Само уравнение имеет вид

$$pL + \frac{r_1(r_2 + pL)}{r_1 + r_2 + pL} = 0.$$

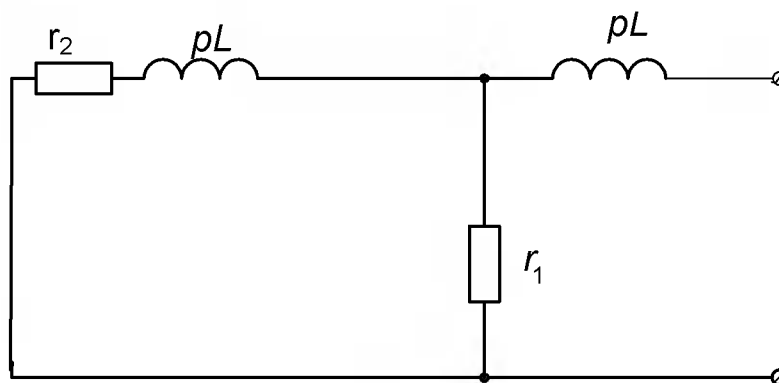


Рис. 24. Схема для написания характеристического уравнения примера 5.2

Далее приведем полученное уравнение к общему знаменателю и числитель приравняем к нулю:

$$\frac{pLr_1 + pLr_2 + p^2L^2 + r_1r_2 + r_1pL}{r_1 + r_2 + pL} = 0,$$

$$p^2L^2 + p(Lr_2 + 2Lr_1) + r_1r_2 = 0,$$

$$p^2 \cdot 0,1^2 + p(0,1 \cdot 10 + 2 \cdot 0,1 \cdot 20) + 10 \cdot 20 = 0,$$

$$0,01p^2 + 5p + 200 = 0.$$

Решая квадратное уравнение, найдем его корни:

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-5 \pm \sqrt{(5)^2 - 4 \cdot 0,01 \cdot 200}}{2 \cdot 0,01},$$

$$p_1 = -43,84 \text{ с}^{-1}, \quad p_2 = -456,2 \text{ с}^{-1}.$$

Следовательно, процесс носит апериодический характер, и свободная составляющая примет вид:

$$i_{L1} = A_1 e^{-43,84t} + A_2 e^{-456,2t}.$$

6. Определение постоянных интегрирования. Уравнение для определения свободной составляющей содержит две постоянных интегрирования, следовательно, для нахождения A_1 и A_2 решим систему уравнений:

$$\begin{cases} i_{L1} = i_{L1np} + A_1 e^{-43,84t} + A_2 e^{-456,2t}, \\ \frac{di_{L1}}{dt} = -43,84 A_1 e^{-43,84t} - 456,2 A_2 e^{-456,2t}. \end{cases}$$

Для момента времени $t = 0$, учитывая, что $\left. \frac{di_{L1}}{dt} \right|_{t=0} = 0 \text{ А/с}$, получим:

$$\begin{cases} 5 = 15 + A_1 + A_2, \\ 0 = -43,84 A_1 - 456,2 A_2. \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим

$$A_1 = -11,063,$$

$$A_2 = 1,063.$$

Уравнение для $i_{L1}(t)$, А, имеет вид:

$$i_{L1}(t) = 15 - 11,063 e^{-43,84t} + 1,063 e^{-456,2t}.$$

Самостоятельное решение студентами индивидуальных задач

Для электрических цепей (прил. 1) в соответствии с предложенным преподавателем вариантом определить $u_C(t)$, $i_L(t)$.

3. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Краткие теоретические сведения

Сущность операторного метода. Некоторая функция вещественной переменной t , удовлетворяющая условию Дирихле (на конечном промежутке времени функция должна иметь конечное число разрывов первого рода и должна быть периодической), в момент времени $t < 0$, $f(t) = 0$ сопоставляется с функцией комплексной переменной $F(p)$ ($p = \alpha + j\omega$ – комплексная переменная).

В данном случае функция вещественной переменной $f(t)$ называется *оригиналом*, а функция комплексной переменной $F(p)$ – *изображением*.

Переход от оригинала к изображению, и наоборот, осуществляется с помощью прямого $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ и обратного $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dt$ преобразований Лапласа.

Математически можно записать, что функция $F(p)$ является изображением функции $f(t)$, следующим образом:

$$F(p) \equiv f(t) \text{ или } F(p) = L\{f(t)\},$$

а функция $f(t)$ оригиналом $F(p)$:

$$f(t) \equiv F(p) \text{ или } f(t) = L^{-1}\{F(p)\}.$$

Оригинал функции можно найти и с помощью теоремы разложения. Если изображение функции представлено в виде дроби

$$F(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_k p^n + a_{k-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_k p^m + b_{k-1} p^{m-1} + \dots + b_0}, \text{ причем многочлены (относи-}$$

тельно p) $N(p)$ и $M(p)$ удовлетворяют следующим условиям: степень $N(p)$ ниже степени $M(p)$, a_k и b_k – вещественные числа, а корни $p_1, p_2, \dots, p_n$ уравнения $M(p) = 0$ различны, то оригинал находим по формуле

$$f(t) = \sum \frac{N(p_k)}{M'(p_k)} e^{p_k t}, \text{ где } M'(p_k) \text{ – значение производной при } p = p_k, N(p_k) \text{ –}$$

значение числителя при $p = p_k$.

В том случае, если один из корней равен нулю, то

$$f(t) = \frac{N(0)}{M(0)} + \sum \frac{N(p_k)}{M'(p_k)p_k} e^{p_k t},$$

$M(0)$ и $N(0)$ – значение знаменателя и числителя соответственно при $p_k = 0$.

Если имеются корни кратностью m_k , то оригинал вычисляется по фор-

$$\text{муле } f(t) = \sum_{k=1}^s \frac{1}{(m_k - 1)!} \left[\frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \frac{N(p)e^{pt}}{M(p)} \right]_{p=p_k}.$$

Кроме вышеперечисленных способов нахождения оригинала и изображения функции, их можно определить с помощью созданных программных продуктов, таких, например, как Mathcad или с помощью специальных таблиц, которые приводятся в справочниках по высшей математике или в учебных пособиях по ТОЭ [3, 9]. Таблица оригиналов и изображений по Лапласу приводится и в данном издании (прил. 2).

При нахождении изображения (оригинала) сложной функции следует помнить, что переход от оригинала к изображению, и наоборот, осуществляется с помощью интегрального преобразования и поэтому:

$$F(p) = L\{Af(t)\} = A \cdot L\{f(t)\},$$

$$F(p) = L\{f(t) + g(t)\} = L\{f(t)\} + L\{g(t)\},$$

$$f(t) = L^{-1}\{AF(p)\} = A \cdot L^{-1}\{F(p)\},$$

$$f(t) = L^{-1}\{F_1(p) + F_2(p)\} = L^{-1}\{F_1(p)\} + L^{-1}\{F_2(p)\}.$$

Использование преобразований Лапласа при расчете переходных процессов в электрических цепях позволяет перейти от системы интегрально-дифференциальных уравнений, описывающих электромагнитные процессы к системе алгебраических уравнений, что существенно упрощает процедуру нахождения искомых токов и напряжений в цепи.

Последовательность расчета переходных процессов операторным методом заключается в следующем.

1. Находят независимые начальные условия – ток на катушке индуктивности $i_L(0)$ и напряжение на конденсаторе $u_C(0)$ в момент коммутации.

2. Составляют операторную схему замещения. Помня при этом,

- что операторная схема сохраняет конфигурацию послекоммутационной электрической цепи;
- активные сопротивления переносятся в операторную схему без изменения;
- индуктивность L заменяется элементом pL последовательно, с ним включается добавочная эдс, которая направлена по току. Величина добавочной эдс равна $Li_L(0)$;

- емкость C заменяется элементом $\frac{1}{pC}$, после которого последова-

тельно включается добавочная эдс, равная $\frac{u_C(0)}{p}$ и направленная против направления тока;

- эдс и токи заменяются их изображениями.

Если задача имеет нулевые независимые начальные условия $u_C(0)=0$, $i_L(0)=0$, то добавочные эдс в операторную схему не включаются.

3. Используя любой известный метод расчета электрических цепей (метод непосредственного применения законов Кирхгофа, метод контурных токов и т. д.), определяют изображения токов $I(p)$ для операторной схемы.

Законы Кирхгофа в операторной форме:

- алгебраическая сумма изображений токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=3}^n I_k(p) = 0,$$

- алгебраическая сумма изображений напряжений в замкнутом контуре равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n U_k(p) = 0.$$

Проверкой правильности нахождения изображения токов служит выполнение следующих предельных соотношений:

- $\lim_{p \rightarrow \infty} I(p) = 0$,
- $\lim_{p \rightarrow \infty} pI(p) = I(0)$,
- $\lim_{p \rightarrow 0} pI(p) = i_{пр}$,
- $\lim_{p \rightarrow \infty} p[pI(p) - i(0)] = \left. \frac{di}{dt} \right|_{t=0}$.

4. Изображение напряжения на любом из элементов цепи находим по закону Ома в операторной форме:

$$\begin{aligned} U_r(p) &= rI(p), \\ U_L(p) &= -Li_L(0) + LpI_L(p), \\ U_C(p) &= \frac{I_C(p)}{Cp} + \frac{U_C(0)}{p}. \end{aligned}$$

По формулам предельного соотношения можно проверить и правильность нахождения изображений напряжения.

5. От изображения токов $I(p)$ и напряжений $U(p)$ переходим к их оригиналам $i(t)$ и $u(t)$.

Операторный метод удобен при расчете сложных электрических цепей.

При применении этого метода можно пользоваться всеми методами расчета электрических цепей.

При ненулевых начальных условиях, пользуясь методом наложения, можно сначала решить задачу для нулевых начальных условий, а затем на полученные результаты наложить те результаты, которые получаются только от действия дополнительных источников энергии.

3.2. Практическое занятие № 6.

Расчет переходных процессов операторным методом.

Методика составления операторных схем замещения

Цель: приобрести навыки составления операторных схем замещения и нахождения изображений токов и напряжений на различных участках цепи.

Порядок проведения занятия

1. Контроль знаний основных теоретических положений по расчету переходных процессов, изложенных на лекции и в учебниках [1–4].
2. Решение типовых задач совместно со студентами.
3. Самостоятельное решение каждым студентом индивидуальных задач.
4. Контроль за самостоятельной работой студентов.
5. Обсуждение наиболее сложных вопросов и разбор типичных ошибок.

Проверка знаний основных теоретических положений

1. Назовите причины возникновения переходных процессов в электрических цепях.
2. Объясните суть операторного метода расчета переходных процессов.
3. Операторное изображение функции $f(t)$ является функцией времени или функцией оператора p ?
4. Сравните преимущества и недостатки классического и операторного методов расчета переходных процессов.
5. Сформулируйте законы Кирхгофа в операторной форме.
6. Назовите правила, по которым составляется операторная схема замещения.

Примеры для совместного решения со студентами типовых задач

Пример 6.1.

Найти операторное изображение эдс, если: а) $E = 200$ В; б) $e(t) = 200 \sin(314 t + 60^\circ)$ В.

Решение

а) Эдс является величиной постоянной, и согласно прил. 2, изображением константы A является функция $\frac{A}{p}$. Тогда получим $E(p) = \frac{E}{p} = \frac{200}{p}$.

б) Для нахождения изображения функции $e(t) = 200 \sin(314 t + 60^\circ)$ воспользуемся данными прил. 2 и одним из свойств изображения $F(p) = L\{Af(t)\} = AL\{f(t)\}$

$$E(p) = A \frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2} = 200 \frac{p \sin 60^\circ + 314 \cos 60^\circ}{p^2 + 314^2} = \frac{173,2p + 31400}{p^2 + 98596}.$$

Пример 6.2.

Две параллельные ветви с параметрами $E = 100 \text{ В}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$, $r_1 = r_2 = r = 10 \text{ Ом}$, $C = 100 \text{ мкФ}$ подключаются к источнику постоянной эдс E (рис. 25). Необходимо составить операторную схему замещения, записать уравнения для нахождения изображений токов методами: непосредственного применения законов Кирхгофа, контурных токов, узловых потенциалов. Найти изображение токов цепи. Ответить на вопрос, что изменится в операторной схеме, если данную цепь подключать к источнику синусоидальной эдс.

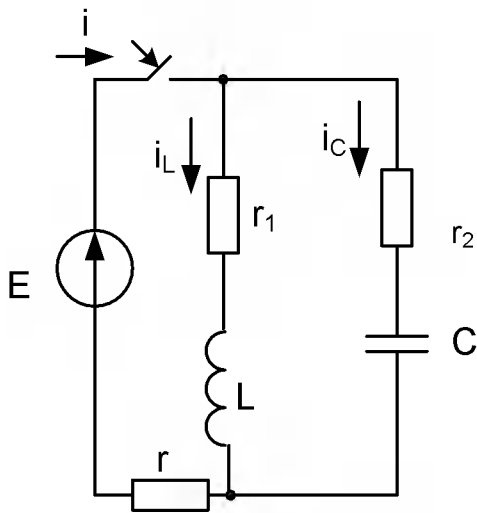


Рис. 25. Расчетная схема для примера 6.2

Решение

1. Составление операторной схемы замещения. Прежде чем составлять операторную схему, определим независимые начальные условия.

Две параллельные ветви, содержащие катушку индуктивности и конденсатор, подключаются к источнику эдс. В условии задачи не сказано, что конденсатор был предварительно заряжен, следовательно, ток в катушке индуктивности и напряжение на конденсаторе до коммутации равнялись нулю. Тогда согласно законам коммутации $i_L(0_-) = i_L(0) = 0 \text{ А}$ и $u_C(0_-) = u_C(0) = 0 \text{ В}$.

Операторная схема сохраняет конфигурацию послекоммутационной электрической цепи. Следовательно, схема замещения будет состоять из трех ветвей. Первая ветвь содержит только источник постоянной эдс. Согласно прил. 2 изображение эдс будет равно отношению $\frac{E}{p}$.

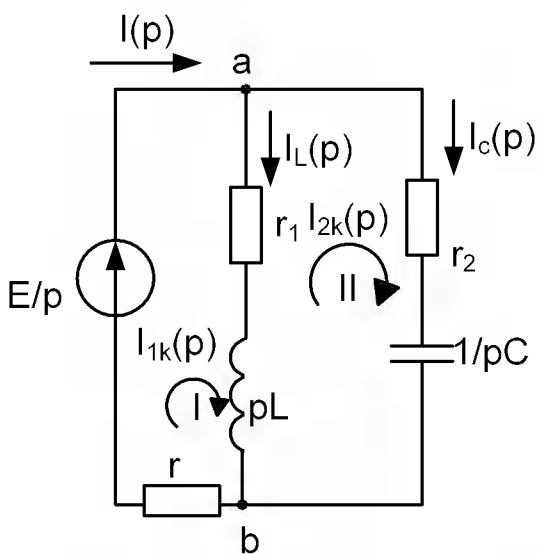


Рис. 26. Операторная схема замещения для примера 6.2

Следуя правилам составления

операторных схем замещения, активное сопротивление переносится без изменения, элемент L заменяется элементом pL , а элемент C на операторной схеме изображается как $1/pC$. Так как начальные условия равны нулю, то в схеме замещения отсутствуют дополнительные источники эдс. Операторная схема замещения приведена на рис. 26.

При замене источника постоянной эдс на источник синусоидальной эдс в операторной схеме изменится только изображение эдс.

2. Уравнения по законам Кирхгофа.

Для операторной схемы замещения составляем уравнения по законам Кирхгофа. Операторная схема замещения содержит три ветви $n_b = 3$, два узла $n_y = 2$. Число уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, $n_y - 1 = 2 - 1 = 1$, по второму закону – $n_b - n_y + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$.

Выберем положительные направления изображений токов и направления обхода двух независимых контуров I и II (рис. 26) и составим уравнения по законам Кирхгофа.

Уравнение для узла а: $I(p) - I_c(p) - I_L(p) = 0$;

для контура I $(r_1 + pL)I_L(p) + rI(p) = E/p$;

для контура II $(r_2 + 1/pC)I_c(p) - (r_1 + pL)I_L(p) = 0$.

3. Составление уравнений по методу контурных токов. Нахождение изображений токов.

Число уравнений, составляемых по методу контурных токов, равно двум $k = n_b - n_y + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$. Зададимся направлениями изображений контурных токов $I_{1k}(p)$, $I_{2k}(p)$ (рис. 26). Составим уравнения для первого и второго контуров:

$$\begin{cases} (r + r_1 + pL)I_{1k}(p) - (r_1 + pL)I_{2k}(p) = \frac{E}{p}, \\ -(r_1 + pL)I_{1k}(p) + (r_1 + pL + r_2 + \frac{1}{pC})I_{2k}(p) = 0. \end{cases}$$

Подставим числовые значения

$$\begin{cases} (10 + 10 + 0,1p)I_{1k}(p) - (10 + 0,1p)I_{2k}(p) = \frac{100}{p}, \\ -(10 + 0,1p)I_{1k}(p) + (10 + 0,1p + 10 + \frac{1}{100 \cdot 10^{-6}p})I_{2k}(p) = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} (20 + 0,1p)I_{1k}(p) - (10 + 0,1p)I_{2k}(p) = \frac{100}{p}, \\ -(10 + 0,1p)I_{1k}(p) + (20 + 0,1p + \frac{10^4}{p})I_{2k}(p) = 0. \end{cases}$$

Полученную систему уравнений решим по методу Крамера:

$$I_{1k}(p) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{100}{p} & -10 - 0,1p \\ 0 & 20 + 0,1p + \frac{10^4}{p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 20 + 0,1p & -10 - 0,1p \\ -10 - 0,1p & 20 + 0,1p + \frac{10^4}{p} \end{vmatrix}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{100}{p}(20 + 0,1p + \frac{10^4}{p}) - 0(-10 - 0,1p)}{(20 + 0,1p)(20 + 0,1p + \frac{10^4}{p}) - (-10 - 0,1p)(-10 - 0,1p)} = \\
&= \frac{\frac{2 \cdot 10^3 p + 10p^2 + 10^6}{p^2}}{\frac{2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5}{p}} = \frac{10p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 10^6}{p(2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5)};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{2K}(p) &= \begin{vmatrix} 20 + 0,1p & \frac{100}{p} \\ -10 - 0,1p & 0 \end{vmatrix} = \\
&= \frac{0(20 + 0,1p) - \frac{100}{p}(-10 - 0,1p)}{(20 + 0,1p)(20 + 0,1p + \frac{10^4}{p}) - (-10 - 0,1p)(-10 - 0,1p)} = \\
&= \frac{\frac{10^3 + 10p}{p}}{\frac{2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5}{p}} = \frac{10p^2 + 10^3 p}{p(2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5)}.
\end{aligned}$$

Найдем изображения токов, A , в цепи.

$$I(p) = I_{k1}(p) = \frac{10p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 10^6}{p(2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5)};$$

$$I_c(p) = I_{2K}(p) = \frac{10p^2 + 10^3 p}{p(2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5)};$$

$$\begin{aligned}
I_L(p) &= I_{1K}(p) - I_{2K}(p) = \frac{10p^2 + 2 \cdot 10^3 p + 10^6}{p(2p^2 + 1,3 \cdot 10^4 p + 2 \cdot 10^5)} - \\
&- \frac{10p^2 + 10^3 p}{p(2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5)} = \frac{10^3 p + 10^6}{p(2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5)}.
\end{aligned}$$

5. Уравнения по методу узловых потенциалов.

Число уравнений, составляемых по методу узловых потенциалов, равно одному $k = n_y - 1 = 1$.

Примем, что изображение потенциала узла b равно нулю ($\varphi_b(p) = 0$).
Запишем уравнение для определения изображения потенциала узла a :

$$(Y_1(p) + Y_2(p) + Y_3(p))\varphi_a(p) = Y_1(p) \frac{E}{p},$$

$$\text{где } Y_1(p) = \frac{1}{r}, Y_2(p) = \frac{1}{r_1 + pL}, Y_3(p) = \frac{1}{r_2 + \frac{1}{pC}}.$$

Применяя закон Ома для отдельных ветвей, определим изображения искомых токов по следующим формулам:

$$I(p) = \frac{-\varphi_a(p) + \frac{E}{p}}{r}; \quad I_L(p) = \frac{\varphi_a(p)}{r_1 + pL}; \quad I_C(p) = \frac{\varphi_a(p)}{r_2 + \frac{1}{pC}}.$$

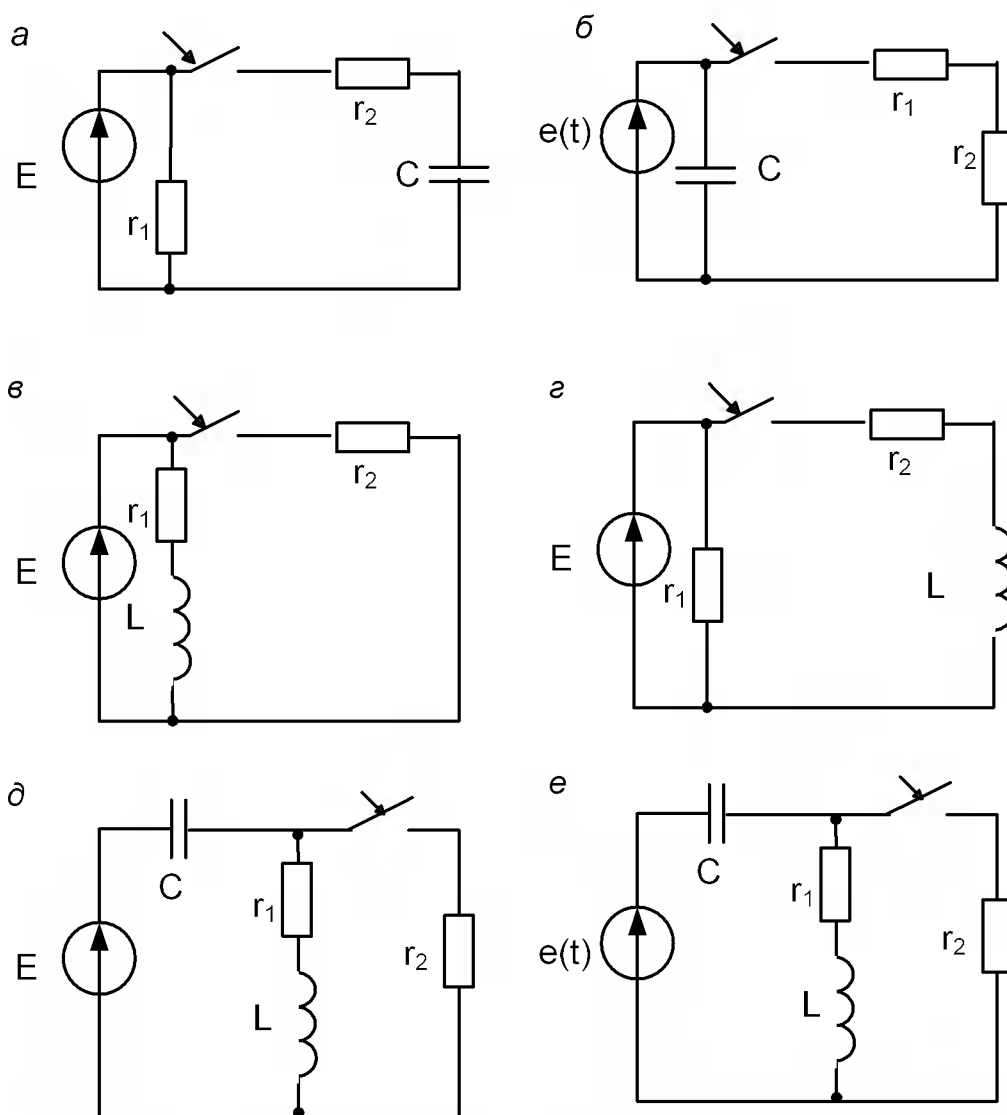


Рис. 27. Примеры электрических схем: а, в, г, д – при подключении к постоянному источнику эдс; б, е – к синусоидальной эдс

Самостоятельное решение студентами индивидуальных задач

1. Для схем, изображенных на рис. 27, составить операторные схемы замещения.

2. Для электрических цепей (прил. 1) в соответствии с предложенным преподавателем вариантом составить операторную схему замещения, уравнения для нахождения изображения токов в цепи.

3.3. Практическое занятие № 7.

Расчет переходных процессов операторным методом. Определение оригиналов токов и напряжений по известным изображениям

Цель: приобрести навыки нахождения оригиналов токов и напряжений по их изображениям.

Порядок проведения занятия

1. Контроль знаний основных теоретических положений по расчету переходных процессов, изложенных на лекции и в учебниках [1–4].

2. Решение типовых задач совместно со студентами.

3. Самостоятельное решение каждым студентом индивидуальных задач.

4. Контроль за самостоятельной работой студентов.

5. Обсуждение наиболее сложных вопросов и разбор типичных ошибок.

Проверка знаний основных теоретических положений

1. Сформулируйте законы коммутации.

2. Объясните суть операторного метода расчета переходных процессов.

3. Запишите, как по закону Ома определить изображение напряжения на резисторе, конденсаторе, катушке индуктивности при нулевых и ненулевых начальных условиях.

4. Какие способы перехода от оригинала функции к ее изображению вы знаете?

5. Запишите теорему разложения, если изображение искомого тока или напряжения имеет вид дроби $F(p) = \frac{N(p)}{M(p)} = \frac{a_k p^n + a_{k-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_k p^m + b_{k-1} p^{m-1} + \dots + b_0}$,

причем многочлены (относительно p) $N(p)$ и $M(p)$ удовлетворяют следующим условиям: $n < m$, a_k и b_k – вещественные числа, а корни $p_1, p_2, \dots, p_m$ уравнения $M(p) = 0$ различны и а) отличны от нуля; б) один из корней равен нулю; в) имеются кратные корни.

6. Используя прил. 2, найдите оригинал изображения тока $I(p) = \frac{2}{p}$;

$$I(p) = \frac{1}{(p + 30)^2}.$$

Примеры для совместного решения со студентами типовых задач

Пример 7.1.

Для схемы (рис. 28) с параметрами $r = 100 \text{ Ом}$; $L = 0,5 \text{ Гн}$; $C = 200 \text{ мкФ}$; $E = 120 \text{ В}$ составить операторную схему замещения и зная, что $I_L(p) = \frac{0,6p^2 + 30p + 1,2 \cdot 10^4}{p(p^2 + 50p + 10^4)}$, найти изображение тока на катушке. Записать $i_L(t)$ и $u_L(t)$.

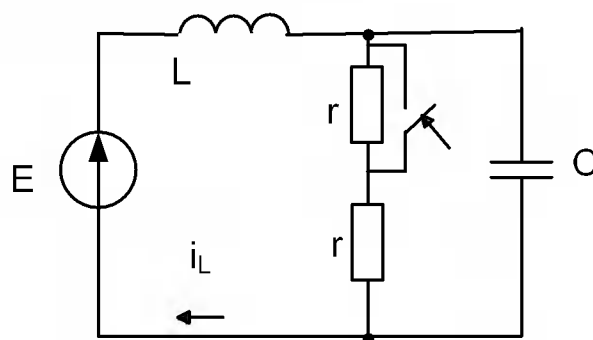


Рис. 28. Расчетная схема для примера 7.1

Решение:

1. До коммутации в катушке индуктивности протекал ток $i_L(0_-)$, и на конденсаторе было напряжение $u_C(0_-)$. По законам коммутации и в момент коммутации на катушке будет ток $i_L(0) = i_L(0_-)$ и напряжение на конденсаторе $u_C(0) = u_C(0_-)$. Следовательно, в операторной схеме замещения будут присутствовать дополнительные источники эдс – $Li_L(0)$ и $\frac{u_C(0)}{p}$.

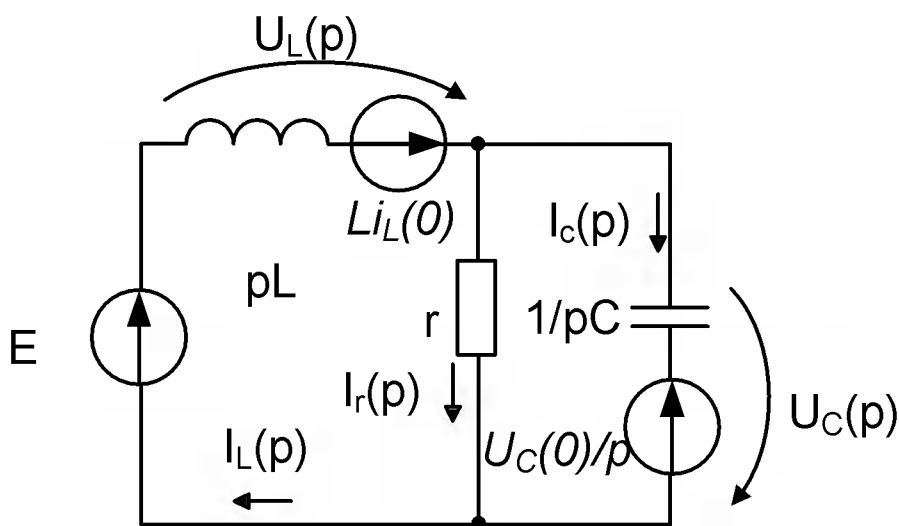


Рис. 29. Операторная схема замещения для примера 7.1

Операторная схема замещения будет иметь вид послекоммутационной цепи. Сопротивление r переносится без изменения, элемент L заменяется на pL , последовательно с которым включается дополнительный источник $Li_L(0)$, направленный по току, а C – на последовательно соединенные элемент $1/pC$ и дополнительный источник эдс $\frac{u_C(0)}{p}$, направленный против тока на конденсаторе (рис. 29).

Изображение напряжения на катушке находим по формуле $U_L(p) = -Li_L(0) + pLI_L(p)$. Из этой формулы видно, что прежде, чем записать изображение напряжения на катушке, надо найти ток в катушке в момент коммутации. По закону коммутации ток на катушке не может изме-

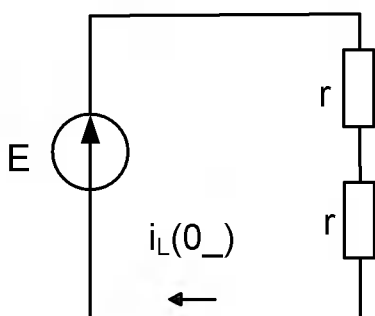


Рис. 30. Докоммутационная схема замещения

ниться скачком и $i_L(0) = i_L(0_-)$. До коммутации в установившемся режиме ток через конденсатор не протекал, так как сопротивление конденсатора постоянному току велико и стремится к бесконечности, и ток на катушке был равен току, протекающему через резисторы $i_L(0_-) = i_r(0_-)$. Докоммутационная схема замещения представлена на рис. 30.

По второму закону Кирхгофа составим уравнение для схемы на рис. 30 и получим, что

$$i_L(0_-) = \frac{E}{r+r} = \frac{120}{100+100} = 0,6 \text{ A.}$$

Теперь можно записать, чему равно изображение напряжения на катушке

$$\begin{aligned} U_L(p) &= -Li_L(0) + LpI_L(p) = -0,5 \cdot 0,6 + 0,5p \frac{0,6p^2 + 30p + 1,2 \cdot 10^4}{p(p^2 + 50p + 10^4)} = \\ &= -0,3 + \frac{0,3p^2 + 15p + 0,6 \cdot 10^4}{p^2 + 50p + 10^4} = \\ &= \frac{-0,3p^2 - 15p - 0,3 \cdot 10^4 + 0,3p^2 + 15p + 0,6 \cdot 10^4}{p^2 + 50p + 10^4} = \\ &= \frac{0,3 \cdot 10^4}{p^2 + 50p + 10^4}. \end{aligned}$$

Записать $i_L(t)$ и $u_L(t)$ – это значит найти оригиналы их изображений.

I. Сначала найдем оригинал изображения тока на катушке. Изображение тока на катушке имеет вид рациональной дроби

$$I_L(p) = \frac{-1,2p^2 - 60p + 1,2 \cdot 10^4}{p(p^2 + 50p + 10^4)} = \frac{N(p)}{pM(p)}, \text{ причем степень числителя меньше}$$

степени знаменателя и коэффициенты при p и в числителе, и в знаменателе – вещественные числа, поэтому можно воспользоваться теоремой разложения в следующей ее записи:

$$\frac{N(p)}{pM(p)} = \frac{N(0)}{M(0)} + \sum \frac{N(p_K)}{M'(p_K) \cdot p_K}. \quad (18)$$

Для нахождения оригинала выполним следующие действия.

1. Приравняем $M(p)$ к нулю $M(p) = p^2 + 50p + 10^4 = 0$, найдем корни полученного квадратного уравнения:

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-50 \pm \sqrt{(50)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10^4}}{2 \cdot 1}.$$

Получим $p_1 = -25 - j96,82 \text{ с}^{-1}$ и $p_2 = -25 + j96,82 \text{ с}^{-1}$.

2. Найдем производную от $M(p)$ по p . $M'(p) = 2p + 50$.

3. Далее определим:

$$N(0) = 0,6 \cdot 0^2 + 30 \cdot 0 + 1,2 \cdot 10^4 = 1,2 \cdot 10^4;$$

$$N(p_1) = N(-25 - j96,82) = 0,6 \cdot (-25 - j96,82)^2 + 30 \cdot (-25 - j96,82) + 1,2 \cdot 10^4 = 6000;$$

$$N(p_2) = N(-25 + j96,82) = 0,6 \cdot (-25 + j96,82)^2 + 30 \cdot (-25 + j96,82) + 1,2 \cdot 10^4 = 6000;$$

$$M(0) = 1 \cdot 0 + 50 \cdot 0 + 10^4 = 10^4;$$

$$M'(p_1) = M'(-25 - j96,82) = 2(-25 - j96,82) + 50 = -j193,64;$$

$$M'(p_2) = M'(-25 + j96,82) = 2(-25 + j96,82) + 50 = j193,64.$$

4. Подставим полученные в п. 3 значения в приведенную формулу разложения, получим закон изменения тока через катушку индуктивности.

$$\begin{aligned} i_L(t) &= \frac{N(0)}{M(0)} + \frac{N(p_1)}{p_1 M'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{p_2 M'(p_2)} e^{p_2 t} = \\ &= \frac{1,2 \cdot 10^4}{10^4} + \frac{6 \cdot 10^3}{(-25 - j96,82) \cdot (-j193,64)} e^{(-25 - j96,82)t} + \\ &+ \frac{6 \cdot 10^3}{(-25 + j96,82) \cdot (j193,64)} e^{(-25 + j96,82)t} = 1,2 - \frac{0,6e^{j104,5}}{2j} e^{(-25 - j96,82)t} + \\ &+ \frac{0,6e^{-j104,5}}{2j} e^{(-25 + j96,82)t} = \left| \text{по формуле Эйлера } \sin \alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j} \right| = \\ &= 1,2 + 0,62 \sin(96,82t - 104,5^\circ), \end{aligned}$$

II. Найдем теперь закон изменения напряжения на катушке, используя уравнение связи

$$\begin{aligned} u_L(t) &= L \frac{di_L}{dt} = 0,5 \frac{d(1,2 + 0,62 \sin(96,82t - 104,5^\circ))}{dt} = \\ &= 0,5 (0,62 \cdot 96,82 \cos(96,82t - 104,5^\circ)) = 30,01 \sin(96,82t - 104,5^\circ). \end{aligned}$$

Пример 7.2.

Для данных примера 6.2 найти изображение и оригинал напряжения на конденсаторе.

Решение

В примере 6.2 было найдено изображение тока на конденсаторе

$$I_C(p) = I_{2K}(p) = \frac{10p^2 + 10^3 p}{p(2p^2 + 1,3 \cdot 10^4 p + 2 \cdot 10^5)}.$$

Применяя закон Ома в операторной форме и помня при этом, что задача примера 6.2 имеет независимые нулевые начальные условия ($u_C(0) = 0$ В, $i_L(0) = 0$ А), найдем изображение напряжения на конденсаторе.

Поскольку изображение напряжения имеет вид рациональной дроби, то для нахождения оригинала применим теорему разложения (18). В данном случае $N(p) = 10^5 p + 10^7$, $M(p) = 2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5$. Далее для отыскания оригинала выполним следующее:

1) приравняем $M(p)$ к нулю $2p^2 + 1,3 \cdot 10^3 p + 2 \cdot 10^5 = 0$. Найдем корни полученного квадратного уравнения:

$$p_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1,3 \cdot 10^3 \pm \sqrt{(1,3 \cdot 10^3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^5}}{2 \cdot 2}.$$

Получим $p_1 = -250 \text{ с}^{-1}$, $p_2 = -400 \text{ с}^{-1}$;

2) найдем производную от $M(p)$ по p . $M'(p) = 4p + 1,3 \cdot 10^3$;

3) определим:

$$N(0) = 10^5 \cdot 0 + 10^7 = 10^7;$$

$$N(p_1) = N(-250) = 10^5 \cdot (-250) + 10^7 = -1,5 \cdot 10^7;$$

$$N(p_2) = N(-400) = 10^5 \cdot (-400) + 10^7 = -3 \cdot 10^7;$$

$$M(0) = 2 \cdot 0^2 + 1,3 \cdot 10^3 \cdot 0 + 2 \cdot 10^5 = 2 \cdot 10^5;$$

$$M'(p_1) = M'(-250) = 4 \cdot (-250) + 1,3 \cdot 10^3 = 300;$$

$$M'(p_2) = M'(-400) = 4 \cdot (-400) + 1,3 \cdot 10^3 = -300;$$

4) подставим полученные в п. 3 значения в формулу разложения, получим закон изменения напряжения на конденсаторе:

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{N(0)}{M(0)} + \frac{N(p_1)}{p_1 M'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{N(p_2)}{p_2 M'(p_2)} e^{p_2 t} = \frac{10^7}{2 \cdot 10^5} + \\ &+ \frac{-1,5 \cdot 10^7}{(-250)(300)} e^{-250t} + \frac{-3 \cdot 10^7}{(-400)(-300)} e^{-400t} = 50 + 200e^{-250t} - 250e^{-400t}. \end{aligned}$$

Таким образом, закон изменения напряжения на конденсаторе:

$$u_C(t) = 50 + 200e^{-250t} - 250e^{-400t}.$$

Самостоятельное решение студентами индивидуальных задач

Для электрических цепей (прил. 1) в соответствии с предложенным преподавателем вариантом найти изображение и оригинал напряжения на конденсаторе.

3.4. Практическое занятие № 8.

Теоретическое и экспериментальное исследование переходных процессов

Цель: рассчитать переходный процесс, возникающий при зарядке конденсатора, операторным методом, подтвердить опытным путем.

Порядок проведения занятия

1. Совместное со студентами решение задач.
2. Самостоятельное решение студентами задач.
3. Проведение лабораторной работы.
4. Обсуждение итогов предварительных расчетов и расчетов, полученных в лабораторной работе.

Примеры для совместного решения со студентами типовых задач

Пример 8.1.

Для схемы рис. 31, а операторным методом найти ток в ветви, где расположен микроамперметр, и напряжение на конденсаторе при замыкании ключа, если $r_1 = 10 \text{ кОм}$; $r_2 = 250 \text{ МОм}$; $r_3 = 200 \text{ кОм}$; $C = 100 \text{ мкФ}$; $U = 80 \text{ В}$.

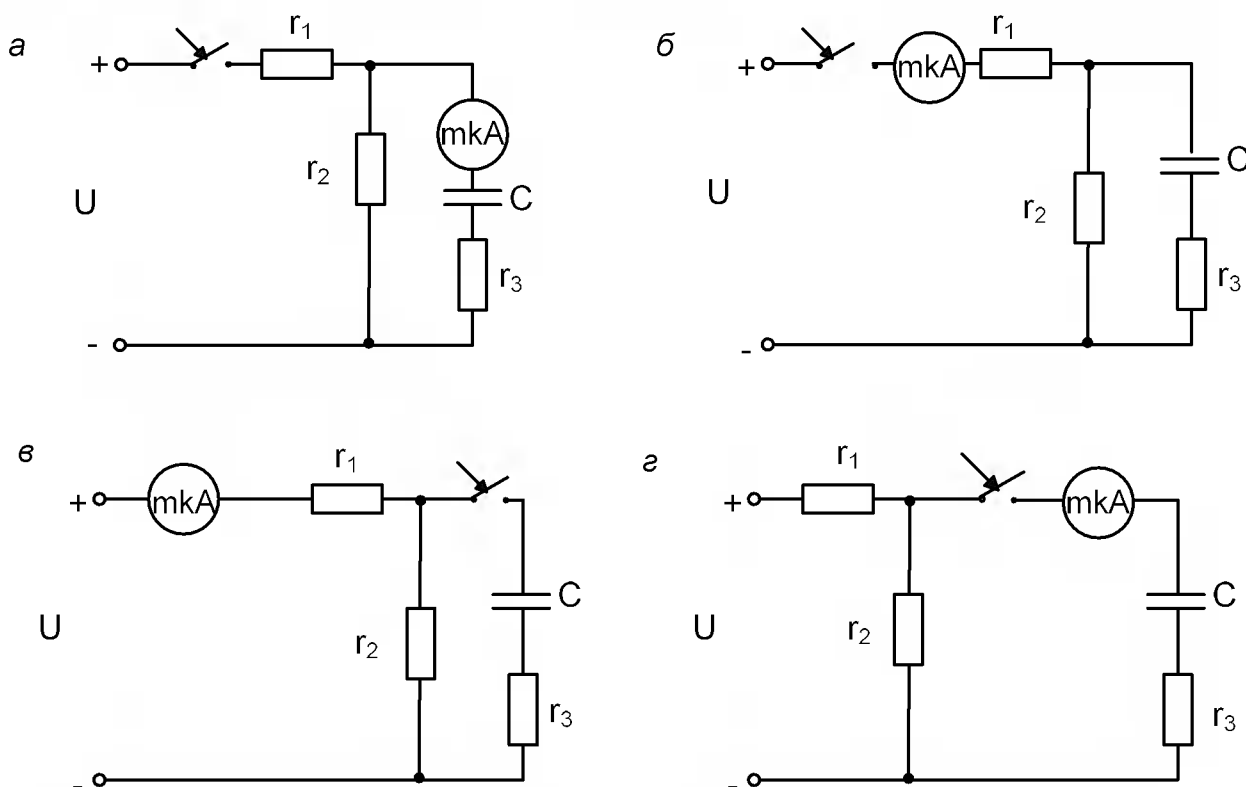


Рис. 31. Варианты схем для теоретического и экспериментального исследования переходного процесса

Решение

1. Найдем независимые начальные условия – напряжение на конденсаторе $u_C(0)$ в момент коммутации. Поскольку цепь не была подключена к источнику питания, и конденсатор не был предварительно заряжен, то $u_C(0_-) = 0$ В, и по закону коммутации $u_C(0) = 0$ В.

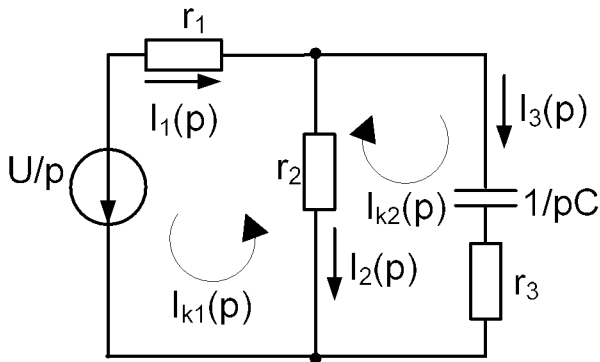


Рис. 32. Операторная схема замещения для примера 8.1

2. Составим операторную схему замещения, пользуясь правилами (подразд. 3.1) и применяя навыки, полученные в ходе проведения практического занятия № 6. Полученная схема замещения приведена на рис. 32.

3. Используя метод контурных токов, определим изображение тока $I_3(p)$

$$(r_1 + r_2)I_{k1}(p) + r_2I_{k2}(p) = \frac{U}{p},$$

$$r_2I_{k1}(p) + (r_2 + r_3 + \frac{1}{pC})I_{k2}(p) = 0.$$

Используя метод Крамера, определим изображение тока $I_3(p) = I_{k2}(p)$:

Рис. 31. Варианты схем для теоретического и экспериментального исследования переходного процесса (варианты схем взяты из [8])

$$I_3(p) = I_{k2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & r_2 \\ r_2 & r_2 + r_3 + \frac{1}{pC} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} r_1 + r_2 & r_2 \\ r_2 & r_2 + r_3 + \frac{1}{pC} \end{vmatrix}} = \frac{p}{(r_1 + r_2)(r_2 + r_3 + \frac{1}{pC}) - r_2^2} =$$

$$= \frac{pUr_2C}{p(pC(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) + r_1 + r_2)}.$$

4. Изображение напряжения на конденсаторе находим по закону Ома в операторной форме:

$$U_C(p) = \frac{I_C(p)}{Cp} + \frac{U_C(0)}{p} = \frac{pUr_2C}{p(pC(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) + r_1 + r_2)} \frac{1}{Cp} + \frac{0}{p} =$$

$$= \frac{Ur_2}{p(pC(r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3) + r_1 + r_2)}. \quad (19)$$

5. Определим оригинал напряжения на конденсаторе. Для этого сначала в формулу (19) подставим числовые значения, а потом произведем некоторые математические преобразования для того, чтобы для нахождения оригинала изображения $U_C(p)$ можно было воспользоваться прил. 2:

$$\begin{aligned}
 U_C(p) &= \frac{80 \cdot 2,5 \cdot 10^8}{p(p10^{-4}(10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^8 + 10^4 \cdot 2 \cdot 10^5 + 2,5 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 10^5) + 10^4 + 2,5 \cdot 10^8)} = \\
 &= \frac{2 \cdot 10^{10}}{p(p10^{-4}(2,5 \cdot 10^{12} + 2 \cdot 10^9 + 5 \cdot 10^{13}) + 2,5 \cdot 10^8)} = \frac{2 \cdot 10^{10}}{p(5,25 \cdot 10^9 p + 2,5 \cdot 10^8)} = \\
 &= \frac{3,81}{p(p + 4,76 \cdot 10^{-2})} = 80 \frac{4,76 \cdot 10^{-2}}{p(p + 4,76 \cdot 10^{-2})}.
 \end{aligned}$$

Используя данные прил. 2 ($L^{-1}\left\{\frac{\alpha}{p(p+\alpha)}\right\} = 1 - e^{-\alpha t}$) и одно из свойств обратного преобразования Лапласа – $F(p) = L\{Af(t)\} = A \cdot L\{f(t)\}$, получаем $u_C(t)$, В,

$$u_C(t) = 80 - 80e^{-4,76 \cdot 10^{-2}t}.$$

6. Ток в ветви, содержащей микроамперметр, найдем, используя уравнение связи $i_C(t) = i_3(t) = C \frac{du_C}{dt}$, мкА,

$$\begin{aligned}
 i_C(t) = i_3(t) &= 10^{-4} \frac{d(80 - 80e^{-4,76 \cdot 10^{-2}t})}{dt} = 10^{-4}(-80)(-4,76 \cdot 10^{-2}e^{-4,76 \cdot 10^{-2}t}) = \\
 &= 380,8e^{-4,76 \cdot 10^{-2}t}.
 \end{aligned}$$

Самостоятельное решение студентами индивидуальных задач

В зависимости от варианта, предложенного преподавателем, студенту необходимо для одной из схем, изображенных на рис. 31, б, в, г, операторным методом найти ток в ветви, где расположен микроамперметр, и напряжение на конденсаторе при замыкании ключа. Числовые значения параметров цепи следующие: для рис. 31, б – $r_1 = 314$ кОм; $r_2 = 1,57$ МОм; $r_3 = 2,23$ кОм $C = 103$ мкФ; $U = 80$ В; для рис. 31, в – $r_1 = 282$ кОм; $r_2 = 2,5$ МОм; $r_3 = 4,93$ кОм $C = 100$ мкФ; $U = 80$ В; для рис. 31, г – $r_1 = 300$ кОм; $r_2 = 2,2$ МОм; $r_3 = 1,07$ кОм $C = 110$ мкФ; $U = 80$ В.

Проведение лабораторной работы¹

Авторы данного пособия предлагают провести лабораторную работу «Исследование переходного процесса», опубликованную в [8].

80_____

¹ Лабораторная работа основывается на возможностях оборудования, которое имеется на кафедре «Электротехника, электроника, электромеханика» ДВГУПС.

При проведении лабораторной работы схема и числовые значения параметров цепи должны совпадать с предложенным преподавателем вариантом при самостоятельном решении задач.

Расчеты, которые авторы [8] рекомендуют провести после выполнения лабораторной работы, в этом пособии студенты выполнили до проведения работы (см. выше). На взгляд авторов настоящего пособия, такой порядок проведения занятия способствует лучшему пониманию взаимосвязи между теорией и практикой.

4. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

4.1. Краткие теоретические сведения

В основу частотного (спектрального) метода положено интегральное преобразование Фурье. Этот метод нашел широкое применение при анализе реакции цепи на воздействие импульса тока или напряжения.

Сущность частотного метода заключается в представлении непериодической функции времени (тока или напряжения) в виде суммы бесконечного множества гармонических составляющих, отличающихся друг от друга по частоте, амплитуде, начальной фазе. При этом предполагается:

1) частота ω принимает всевозможные значения от $-\infty$ до $+\infty$;

2) синусоидальные составляющие на вход цепи поступили достаточно давно, и реакция цепи будет иметь установившийся характер.

Таким образом, задача расчета переходного процесса подменяется задачей расчета цепи в установившемся режиме при воздействии множества гармонических составляющих импульса.

Из курса высшей математики [9] известно, что любая абсолютно интегрируемая функция времени может быть вычислена в виде наложения бесконечного множества своих гармонических составляющих с помощью интеграла Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (20)$$

Другими словами, интеграл Фурье дает разложение функции времени в непрерывный спектр.

В формуле (20) комплексная функция частоты $F(j\omega)$ дает закон изменения комплексных амплитуд гармоник в зависимости от частоты и называется *частотным спектром* (спектральной плотностью, спектральной, частотной или амплитудно-фазовой характеристикой) заданной функции $f(t)$ [1, 2] и вычисляется по формуле

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(\omega) e^{j\theta(\omega)}. \quad (21)$$

Модуль частотного спектра $F(\omega)$, характеризующий зависимость амплитуды гармонических составляющих от частоты, называется *амплитудно-частотной характеристикой*. Аргумент частотного спектра $\Theta(\omega)$, характеризующий зависимость начальной фазы гармоник от частоты, называется *фазочастотной характеристикой*.

Соотношения (20) и (21) называются соответственно *обратным и прямым преобразованием Фурье* и обозначаются $F^{-1}\{F(j\omega)\}$ и $F\{f(t)\}$.

Сравнивая прямое преобразование Фурье

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

с прямым преобразованием Лапласа

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt,$$

обратное преобразование Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

с обратным преобразованием Лапласа

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)e^{pt} dt,$$

можно сделать вывод, что преобразования Фурье являются частным случаем преобразований Лапласа и получаются из него при $p = j\omega$.

Следовательно, частотный спектр $F(j\omega)$ функции $f(t)$ совпадает с соответствующим изображением Лапласа при замене p на $j\omega$. Это свойство позволяет по аналогии с операторным методом определять мгновенные значения токов и напряжений в цепи при подаче на вход импульса напряжения или тока.

Методика расчета переходных процессов частотным методом аналогична методике расчета операторным методом, изложенной в разд. 3.

В табл. 2 приведены законы Ома и Кирхгофа для частотных спектров (спектральная форма) и в операторной форме. В прил. 3 для некоторых наиболее употребляемых функций времени показаны их частотные спектры.

При расчете частотным методом используют следующие теоремы.

Теорема подобия. Пусть задана функция времени и известна ее частотная характеристика $f(t) \rightarrow F(j\omega)$. Частотная характеристика новой функции времени $f(kt)$, где k – постоянная, определится выражением $f(kt) \rightarrow \frac{1}{k} F(j\frac{\omega}{k})$.

Законы Ома и Кирхгофа в операторной и спектральной формах

Закон	Операторная форма	Спектральная форма
Ома	$I(p) = \frac{U(p)}{Z(p)}$	$I(j\omega) = \frac{U(j\omega)}{Z(j\omega)}$
Первый закон Кирхгофа	$\sum_{k=3}^n I_k(p) = 0$	$\sum_{k=3}^n I_k(j\omega) = 0$
Второй закон Кирхгофа	$\sum_{k=1}^n U_k(p) = 0$	$\sum_{k=1}^n U_k(j\omega) = 0$

Следовательно, увеличение продолжительности импульса вызывает сжатие его частотной характеристики и уменьшение амплитуд гармонических составляющих.

Теорема запаздывания. Если $f(t) \stackrel{.}{=} F(j\omega)$, то $f(t \pm t_0) \stackrel{.}{=} F(j\omega)e^{\pm j\omega t_0}$.

Согласно этой теореме запаздывание функции на время t_0 вызывает смещение фазочастотной характеристики функции на угол ωt_0 , но амплитудно-частотная характеристика не меняется.

Теорема смещения. Если $f(t) \stackrel{.}{=} F(j\omega)$, то $f(t)e^{\pm j\omega_0 t} \stackrel{.}{=} F(j\omega \mp j\omega_0)$. Это

означает, что смещение частотной характеристики на $\pm \omega_0$ связано с умножением функции времени на $e^{\mp j\omega_0 t}$.

4.2. Практическое занятие № 9.

Расчет переходных процессов частотным методом

Цель: приобрести навыки расчета переходных процессов частотным методом.

Порядок проведения занятия

1. Контроль знаний основных теоретических положений по расчету переходных процессов, изложенных на лекции и в учебниках [1–4].
2. Решение типовых задач совместно со студентами.
3. Самостоятельное решение каждым студентом индивидуальных задач.
4. Контроль за самостоятельной работой студентов.
5. Обсуждение наиболее сложных вопросов и разбор типичных ошибок.

Проверка знаний основных теоретических положений

1. Объясните суть частотного метода расчета переходных процессов.
2. Что такое частотная, амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики цепи?
3. Сформулируйте законы Кирхгофа в спектральной форме.
4. На каком этапе расчета тока в переходном процессе частотным методом необходимо использовать комплексный метод расчета цепей переменного тока?
5. Можно ли применять частотный метод для расчета переходных процессов при ненулевых начальных условиях?
6. Назовите основные этапы расчета переходных процессов частотным методом.

Примеры для совместного решения со студентами типовых задач

Пример 9.1.

Частотным методом рассчитать токи в цепи (рис. 33) при подключении данной электрической схемы к источнику экспоненциальной эдс $e(t) = 100e^{-2t}$. Параметры цепи: $r = 10 \text{ Ом}$, $L = 0,1 \text{ Гн}$, $C = 100 \text{ мкФ}$.

Решение

1. Определим независимые начальные условия. До коммутации цепь не подключена к источнику питания, следовательно, токов и падений напряжений в цепи нет. Тогда по законам коммутации $i_L(0_-) = i_L(0) = 0 \text{ А}$,

$$u_C(0_-) = u_C(0) = 0 \text{ В}.$$

2. Составим комплексную схему замещения. Комплексную схему замещения (рис. 34) составляют по тем же правилам, что и операторную, заменяя p на $j\omega$.

3. Определим частотные спектры токов и напряжений.

3.1. По таблицам функций и их

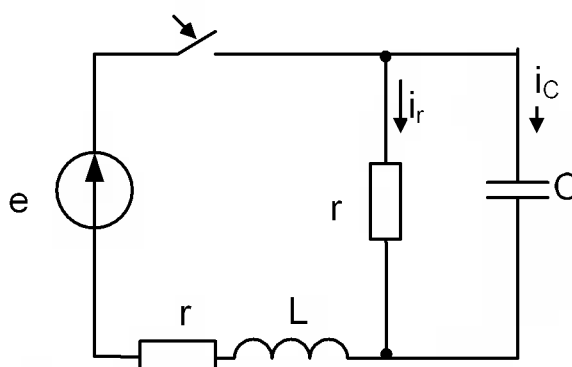


Рис. 33. Расчетная схема для примера 9.1

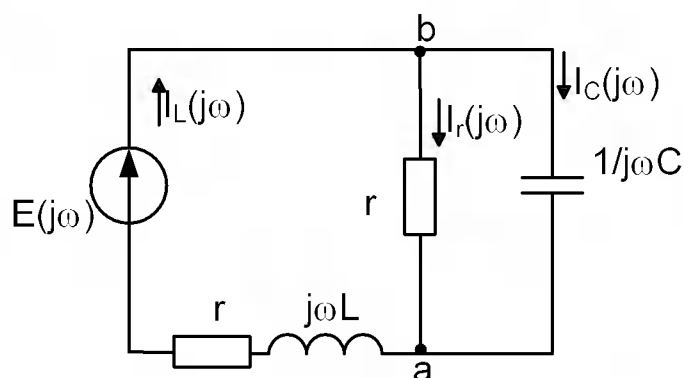


Рис. 34. Комплексная схема замещения для примера 9.1

частотных характеристик (прил. 3) запишем частотный спектр эдс, В,

$$E(j\omega) = \frac{A}{j\omega + \beta} = \frac{100}{j\omega + 2}.$$

3.2. Для комплексной схемы замещения, используя любой известный метод, составим уравнения для нахождения частотных спектров токов.

В данном случае воспользуемся методом узловых потенциалов. Так как схема имеет два узла, то уравнение надо составить лишь одно. Для этого сначала найдем комплексные проводимости ветвей $Y_1(j\omega)$, $Y_2(j\omega)$ и $Y_3(j\omega)$, См, для любой частоты:

$$Y_1(j\omega) = \frac{1}{r + j\omega L} = \frac{1}{10 + j0,1\omega};$$

$$Y_2(j\omega) = \frac{1}{r} = \frac{1}{10} = 0,1;$$

$$Y_3(j\omega) = \frac{1}{\frac{1}{j\omega C}} = j\omega C = j10^{-4}\omega.$$

Принимая $\varphi_a(j\omega) = 0$ В, запишем узловое уравнение в комплексной форме для узла **b**:

$$\varphi_b(j\omega)(Y_1(j\omega) + Y_2(j\omega) + Y_3(j\omega)) = E(j\omega)Y_1(j\omega).$$

Из последнего уравнения выразим $\varphi_b(j\omega)$

$$\varphi_b(j\omega) = \frac{E(j\omega)Y_1(j\omega)}{Y_1(j\omega) + Y_2(j\omega) + Y_3(j\omega)}.$$

Зная частотный спектр потенциала узла **b**, по закону Ома определим частотные характеристики токов $I_r(j\omega)$ и $I_C(j\omega)$, а $I(j\omega)$ определим из первого закона Кирхгофа в спектральной форме

$$\begin{aligned} I_r(j\omega) = \varphi_b(j\omega)Y_2(j\omega) &= \frac{E(j\omega)Y_1(j\omega)Y_2(j\omega)}{Y_1(j\omega) + Y_2(j\omega) + Y_3(j\omega)} = \frac{\frac{100}{j\omega + 2} \frac{1}{10 + j0,1\omega} \cdot 0,1}{\frac{1}{10 + j0,1\omega} + 0,1 + j\omega 10^{-4}} = \\ &= \frac{100}{(2 + j\omega)((j\omega)^2 10^{-5} + j\omega 0,102 + 20)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_C(j\omega) = \varphi_b(j\omega)Y_3(j\omega) &= \frac{E(j\omega)Y_1(j\omega)Y_3(j\omega)}{Y_1(j\omega) + Y_2(j\omega) + Y_3(j\omega)} = \frac{\frac{100}{j\omega + 2} \frac{1}{10 + j0,1\omega} j\omega 10^{-4}}{\frac{1}{10 + j0,1\omega} + 0,1 + j\omega 10^{-4}} = \\ &= \frac{j\omega 0,1}{(2 + j\omega)((j\omega)^2 10^{-5} + j\omega 0,102 + 20)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_L(j\omega) &= I_r(j\omega) + i_C(j\omega) = \frac{E(j\omega)Y_1(j\omega)Y_2(j\omega)}{Y_1(j\omega) + Y_2(j\omega) + Y_3(j\omega)} + \frac{E(j\omega)Y_1(j\omega)Y_3(j\omega)}{Y_1(j\omega) + Y_2(j\omega) + Y_3(j\omega)} = \\
 &= \frac{100}{(2 + j\omega)((j\omega)^2 10^{-5} + j\omega 0,102 + 20)} + \frac{j\omega 0,1}{(2 + j\omega)((j\omega)^2 10^{-5} + j\omega 0,102 + 20)} = \\
 &= \frac{100 + j\omega 0,1}{(2 + j\omega)((j\omega)^2 10^{-5} + j\omega 0,102 + 20)}.
 \end{aligned}$$

4. Определение оригиналов токов.

Оригиналы токов найдем по теореме разложения, которую использовали при расчете операторным методом, произведя замену p на $j\omega$.

4.1. Вначале найдем оригинал изображения тока, протекающего во второй ветви. Видно, что изображение тока, протекающего через резистор,

имеет вид рациональной дроби $I_r(j\omega) = \frac{100}{(2 + j\omega)((j\omega)^2 10^{-5} + j\omega 0,102 + 20)}$,

причем степень числителя меньше степени знаменателя и коэффициенты при $j\omega$ и в числителе, и в знаменателе – вещественные числа, поэтому можно воспользоваться теоремой разложения в следующей ее записи:

$$\frac{N(j\omega)}{M(j\omega)} = \sum \frac{N((j\omega)_K)}{M'((j\omega)_K)} e^{(j\omega)_K t}.$$

Для частотного спектра тока $I_r(j\omega)$ –

$$N(j\omega) = 100 \quad \text{и} \quad M(j\omega) = (2 + j\omega)((j\omega)^2 10^{-5} + (j\omega)0,102 + 20).$$

Далее для нахождения оригинала выполним следующие действия.

Приравняем $M(j\omega)$ к нулю и найдем корни получившегося уравнения

$$(2 + j\omega)((j\omega)^2 10^{-5} + (j\omega)0,102 + 20) = 0.$$

$$\text{Следовательно,} \quad (2 + j\omega) = 0 \quad (22)$$

$$\text{или} \quad (j\omega)^2 10^{-5} + (j\omega)0,102 + 20 = 0. \quad (23)$$

Решая (22) и (23), получим $(j\omega)_1 = -2$ рад/с,

$$(j\omega)_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-0,102 \pm \sqrt{(0,102)^2 - 4 \cdot 10^{-5} \cdot 20}}{2 \cdot 10^{-5}},$$

$$(j\omega)_2 = -856,2 \text{ рад/с и } (j\omega)_3 = -9344 \text{ рад/с.}$$

Найдем производную от $M(j\omega)$ по $(j\omega)$

$$M'(j\omega) = ((j\omega)^2 10^{-5} + (j\omega)0,102 + 20) + (2 + j\omega)(2(j\omega)10^{-5} + 0,102).$$

После раскрытия скобок и приведения подобных получим:

$$M'(j\omega) = ((j\omega)^2 3 \cdot 10^{-5} + (j\omega)0,204 + 20,204).$$

Далее определим:

$$N((j\omega)_1) = N((j\omega)_2) = N((j\omega)_3) = 100;$$

$$M'((j\omega)_1) = M'(-2) = (-2)^2 \cdot 3 \cdot 10^{-5} + (-2) \cdot 0,204 + 20,204 = 19,8;$$

$$M'((j\omega)_2) = M'(-856,2) = (-856,2)^2 \cdot 3 \cdot 10^{-5} + (-856,2) \cdot 0,204 + 20,204 = -132,5;$$

$$M'((j\omega)_3) = M'(-9344) = (-9344)^2 \cdot 3 \cdot 10^{-5} + (-9344) \cdot 0,204 + 20,204 = 732,8.$$

Подставим полученные в п. 3 значения в приведенную формулу разложения, получим закон изменения тока, А, через резистор

$$\begin{aligned} i_r(t) &= \frac{N((j\omega)_1)}{M'((j\omega)_1)} e^{(j\omega)_1 t} + \frac{N((j\omega)_2)}{M'((j\omega)_2)} e^{(j\omega)_2 t} + \frac{N((j\omega)_3)}{M'((j\omega)_3)} e^{(j\omega)_3 t} = \\ &= \frac{100}{19,8} e^{-2t} + \frac{100}{-132,5} e^{-856,2t} + \frac{100}{732,8} e^{-9344t} = \\ &= 5,05e^{-2t} - 0,75e^{-856,2t} + 0,14e^{-9344t}. \end{aligned}$$

4.2. Найдем закон изменения тока, протекающего через конденсатор. Для его нахождения по частотному спектру воспользуемся той же самой теоремой разложения. Знаменатели частотных спектров токов $I_r(j\omega)$ и $I_C(j\omega)$ одинаковы, поэтому не надо находить величины $(j\omega)_k$ и $M'((j\omega)_k)$, они найдены выше.

Определим $N((j\omega)_k)$

$$N(j\omega) = j\omega 0,1;$$

$$N((j\omega)_1) = N(-2) = -2 \cdot 0,1 = -0,2;$$

$$N((j\omega)_2) = N(-856,2) = -856,2 \cdot 0,1 = -85,62;$$

$$N((j\omega)_3) = N(-9344) = -9344 \cdot 0,1 = -934,4.$$

Подставим полученные значения в формулу разложения, получим закон изменения тока, А, через конденсатор

$$\begin{aligned} i_C(t) &= \frac{N((j\omega)_1)}{M'((j\omega)_1)} e^{(j\omega)_1 t} + \frac{N((j\omega)_2)}{M'((j\omega)_2)} e^{(j\omega)_2 t} + \frac{N((j\omega)_3)}{M'((j\omega)_3)} e^{(j\omega)_3 t} = \\ &= \frac{-0,2}{19,8} e^{-2t} + \frac{-85,62}{-132,5} e^{-856,2t} + \frac{-934,4}{732,8} e^{-9344t} = \\ &= -0,01e^{-2t} + 0,65e^{-856,2t} - 1,28e^{-9344t}. \end{aligned}$$

4.3. Ток, А, протекающий через катушку индуктивности, найдем по закону Кирхгофа для узла **b**

$$\begin{aligned} i_L(t) &= i_r(t) + i_C(t) = 5,05e^{-2t} - 0,75e^{-856,2t} + 0,14e^{-9344t} - 0,01e^{-2t} + \\ &+ 0,65e^{-856,2t} - 1,28e^{-9344t} = 5,04e^{-2t} - 0,1e^{-856,2t} - 1,14e^{-9344t}. \end{aligned}$$

Самостоятельное решение студентами индивидуальных задач

Для электрических цепей (прил. 1) в соответствии с предложенным преподавателем вариантом:

1) преобразовать схему, заменив катушку индуктивности L резистором с сопротивлением r (четные варианты) или конденсатор C резистором с сопротивлением r (нечетные варианты);

2) для полученных схем частотным методом рассчитать токи в цепи и найти напряжения на катушке индуктивности (конденсаторе), если цепь подключается к синусоидальному источнику эдс, В, $e(t) = E\sqrt{2} \sin(314t + 45^\circ)$.

5. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ПАКЕТОВ ЭВМ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

5.1. Общие сведения

Из материала, изложенного выше, видно, что анализ работы электрических цепей при переходных процессах различными методами невозможен без знания соответствующих разделов математики. Кроме того, расчет переходных процессов – достаточно трудоемкий. Применение персональных компьютеров с использованием различных программных продуктов, с одной стороны, позволяет существенно снизить трудоемкость процесса расчета, с другой, открывает новые возможности в анализе работы электрических цепей.

Из всего разнообразия прикладных программных пакетов, позволяющих анализировать работу электрических цепей при различных режимах, авторы выбрали два: Electronics Workbench (EWB) версия 5.12 и Mathcad версии 2001.

Этот выбор неслучаен. Он связан, во-первых, с популярностью среди студентов, научно-технических работников этих программных продуктов; во-вторых, с их простотой применения; в-третьих, в Electronics Workbench можно моделировать различные процессы в электрических цепях при изменении тех или иных параметров; в-четвертых, Mathcad позволяет производить расчеты, начиная от арифметических действий и заканчивая сложными реализациями численных методов; и, в-пятых, применение Electronics Workbench и Mathcad в расчетах студенты электротехнических специальностей ДВГУПС осваивают на занятиях по информатике.

Тем, кто незнаком с правилами работы с программами Electronics Workbench и Mathcad, перед началом соответствующих занятий необходимо ознакомиться с ними по [10–13].

5.2. Практическое занятие № 10.

Использование программы Electronics Workbench (EWB) версия 5.12 для экспериментального исследования переходных процессов в сложных электрических цепях

Цель: ознакомиться с методом решения задач переходных процессов при помощи EWB, проверить расчеты, полученные на предыдущих занятиях.

Порядок проведения занятия

1. Совместное со студентами решение типовых задач.
2. Самостоятельное решение студентами индивидуальных задач.
3. Обсуждение итогов расчетов.

Примеры для совместного решения со студентами типовых задач

Пример 10.1.

Используя программу EWB, собрать схему (см. рис. 21) с параметрами примера 5.1 практического занятия 5. Схема, составленная для моделирования по заданным условиям, показана на рис. 35.

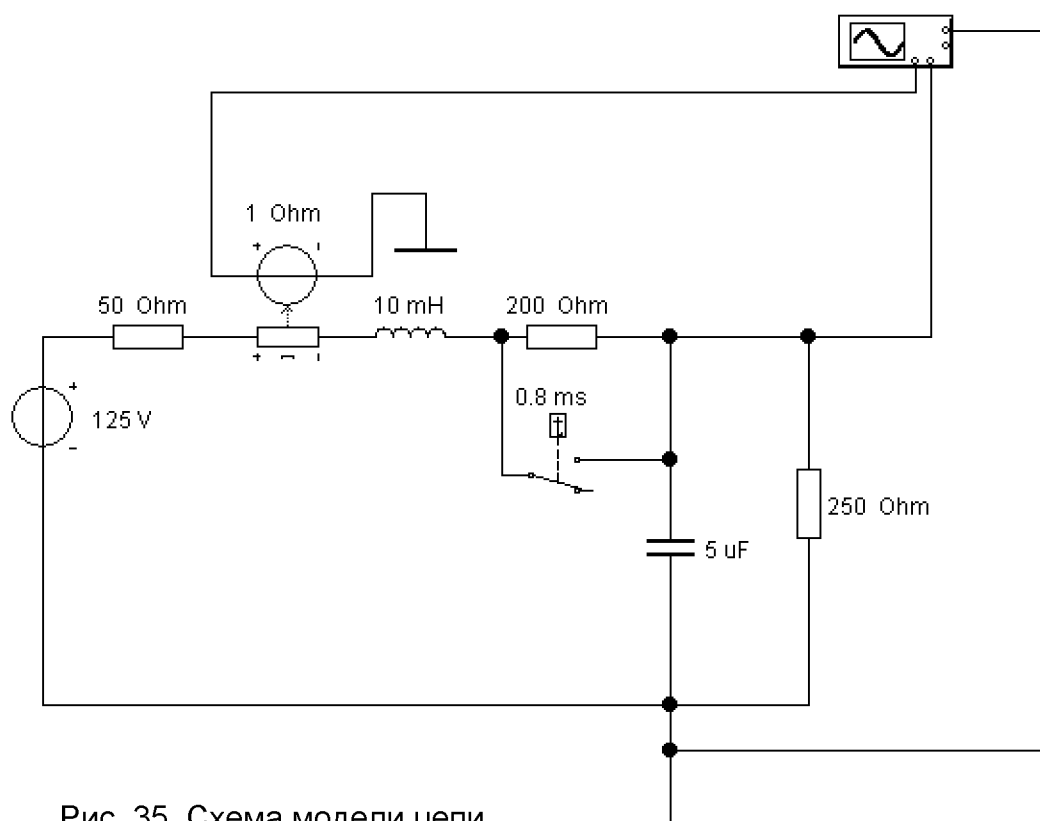


Рис. 35. Схема модели цепи

На рис. 36 показан вид панели виртуального осциллографа, и приведены выбранные режимы работы прибора.

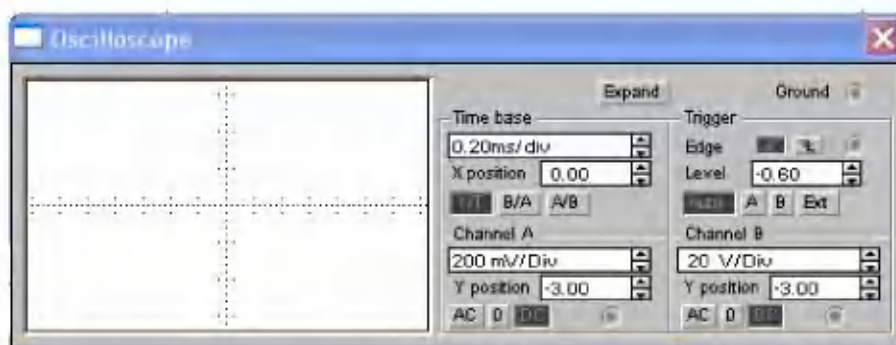


Рис. 36. Панель виртуального осциллографа

Для экспериментального определения искомых величин $u_C(t)$ и $i_L(t)$ можно воспользоваться увеличенной моделью осциллографа (рис. 37).

Первый курсор установлен в начале переходного процесса, а второй курсор – на отметке текущего времени, в данном случае 2000 мкс. Из окон осциллографа считываются значения, соответствующие нужному моменту времени. Для сравнения результатов расчета и эксперимента составляется табл. 3.

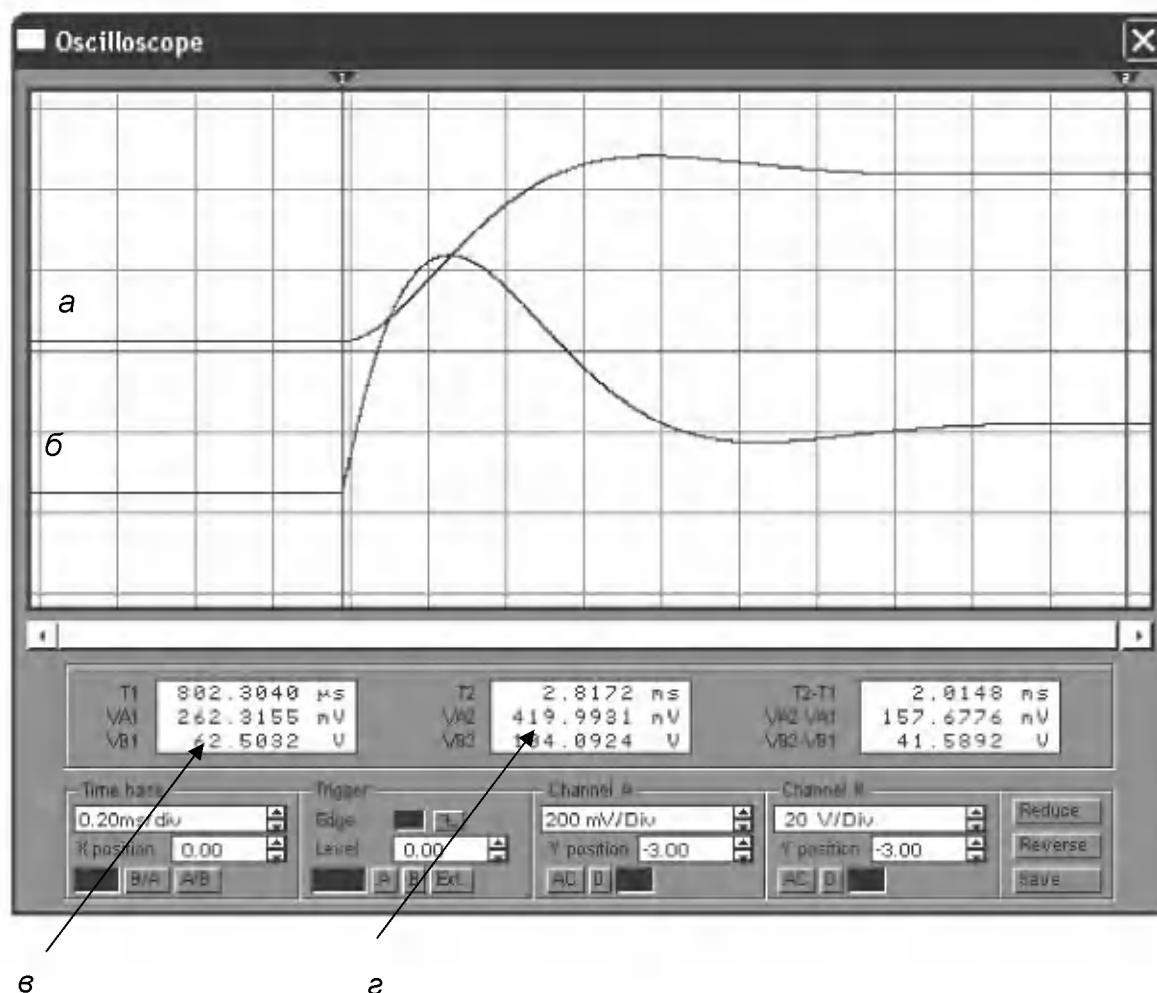


Рис. 37. Результаты моделирования переходного процесса в цепи: а – кривая изменения напряжения на конденсаторе; б – кривая изменения тока в катушке индуктивности; в – окно измерения в позиции курсора 1; г – окно измерения в позиции курсора 2

Сравнение результатов расчета и эксперимента

t , мкс	0	400	800	1200	1600	2000
$i_{L\text{расч}}(t)$, А	0,25	0,776	0,431	0,382	0,416	0,421
$i_{L\text{эксп}}(t)$, А	0,26	0,778	0,432	0,381	0,415	0,420
$u_{C\text{расч}}(t)$, В	62,5	94,56	108,13	104,9	103,6	103,7
$u_{C\text{эксп}}(t)$, В	62,5	94,61	108,3	105,1	103,7	104,1

Самостоятельное решение студентами индивидуальных задач

Используя программу EWB, собрать схему электрической цепи для своего варианта, предложенного преподавателем (прил. 1). Произвести измерения тока в индуктивности и напряжения на емкости. Полученные результаты сравнить с результатами, полученными на практических занятиях № 5, 7.

5.3. Практическое занятие № 11.**Использование программы Mathcad для экспериментального исследования переходных процессов в сложных электрических цепях**

Цель: ознакомиться с методом решения задач переходных процессов при помощи Mathcad, проверить расчеты, полученные на предыдущих занятиях.

Порядок проведения занятия

1. Совместное со студентами решение типовых задач.
2. Самостоятельное решение студентами индивидуальных задач.
3. Обсуждение итогов расчетов.

Примеры для совместного решения со студентами типовых задач**Пример 11.1.**

Используя программу Mathcad, операторным методом рассчитать токи в цепи (см. рис. 25). Числовые значения параметров цепи взять из примера 6.2.

Решение

Прежде чем приступить к решению поставленной задачи, студентам необходимо напомнить, что в Mathcad комплексная переменная p обозначается как s , прямое и обратное преобразование Лапласа можно выполнить с помощью функций $\text{laplace}, t$ и $\text{invlaplace}, s$.

На рис. 38 приведены результаты расчета переходного процесса операторным методом в Mathcad в исследуемой цепи.

Порядок расчета переходного процесса операторным методом с помощью Mathcad следующий:

а) по схеме (см. рис. 26) составим уравнения по законам Кирхгофа в операторной форме;

б) с помощью функции Find($x_1, x_2, \dots$) найдем изображение токов в цепи;

в) применяя закон Ома в операторной форме для участка цепи, содержащего конденсатор, определим изображение напряжения на конденсаторе;

г) при помощи функции обратного преобразования Лапласа invlaplace,s определим оригиналы токов и напряжения на конденсаторе;

д) используя графические возможности Mathcad, строим временные зависимости токов и напряжения на конденсаторе, полученные при расчетах в Mathcad, и напряжение, В, $u_C(t) = 50 + 200e^{-250t} - 250e^{-400t}$, найденное в примере 7.2.

Самостоятельное решение студентами индивидуальных задач

Используя программу Mathcad, операторным методом найти токи и напряжение на конденсаторе в электрической цепи, согласно варианту, предложенному преподавателем (прил. 1). Результаты сравнить с результатами, полученными на практических занятиях № 5, 7.

$E := 100 \text{ В}$; $r := 10 \text{ Ом}$; $C := 100 \cdot 10^{-6} \text{ Ф}$; $L := 0.1 \text{ Гн}$ - численные значения параметров цепи

$E \xrightarrow{\text{laplace}, t} \frac{E}{s}$ осуществляем прямое преобразование Лапласа с применением ключевого слова laplace

Given

$$I_1 = I_L + I_C$$

записываем систему уравнений для нахождения изображений токов, $\rightarrow$ В,
Given – ключевое слово

$$I_1 \cdot r + I_L \cdot (r + s \cdot L) = \frac{100}{s}$$

$$I_C \cdot \left(r + \frac{1}{s \cdot C} \right) - I_L \cdot (r + s \cdot L) = 0$$

$$\text{Find}(I_1, I_L, I_C) \left| \begin{array}{l} \text{complex} \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{(2.00 \cdot 10^4 \cdot s \cdot C + 1.00 \cdot 10^3 + 100 \cdot s^2 \cdot C)}{s^1 \cdot (3.00 \cdot 10^3 \cdot s \cdot C + 20 \cdot s^2 \cdot C + 200 + s)^1} \\ \frac{(1.00 \cdot 10^4 \cdot s \cdot C + 1.00 \cdot 10^3)}{s^1 \cdot (3.00 \cdot 10^3 \cdot s \cdot C + 20 \cdot s^2 \cdot C + 200 + s)^1} \\ 100 \cdot C \cdot \frac{(100 + s)}{(3.00 \cdot 10^3 \cdot s \cdot C + 20 \cdot s^2 \cdot C + 200 + s)^1} \end{array} \right]$$

- решение системы уравнений.
Find(x1,...,xm) - встроенная функция для решения системы уравнения; complex - ключевое слово с помощью которого можно преобразовывать выражения; float,3 - определяет до трех точность вывода результата с плавающей точкой

Осуществляем обратное преобразование Лапласа изображений токов I_1 , I_L , I_C , соответственно, применяя ключевое слово invlaplace

$$\frac{(1.00 \cdot 10^3 \cdot s + 5.00 \cdot 10^5 + 5 \cdot s^2)}{s^1 \cdot (650 \cdot s + s^2 + 1.00 \cdot 10^5)^1} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace}, s \\ \text{float}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 5 + 15 \cdot \exp(-400 \cdot t) - 15 \cdot \exp(-250 \cdot t)$$

Рис. 38. Расчет переходного процесса в электрической цепи, изображенной на рис. 25 (см. также с. 67, 68)

$$\frac{(500 \cdot s + 5.00 \cdot 10^5)}{s^1 \cdot (650 \cdot s + s^2 + 1.00 \cdot 10^5)^1} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, } s \\ \text{float, } 3 \end{array} \right. \rightarrow 5. + 5. \cdot \exp(-400 \cdot t) - 10. \cdot \exp(-250 \cdot t)$$

$$\frac{(5 \cdot s + 500.)}{(650 \cdot s + s^2 + 1.00 \cdot 10^5)^1} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, } s \\ \text{float, } 3 \end{array} \right. \rightarrow 10. \cdot \exp(-400 \cdot t) - 5. \cdot \exp(-250 \cdot t)$$

По закону Ома в операторной форме определяем изображение напряжения на конденсаторе и его оригинал, соответственно

$$U_c = \frac{1}{C \cdot s} \cdot I_c \quad U_c = \frac{1}{100 \cdot 10^{-6} \cdot s} \cdot \frac{(5 \cdot s + 500.)}{(650 \cdot s + s^2 + 1.00 \cdot 10^5)^1}$$

$$\frac{1}{100 \cdot 10^{-6} \cdot s} \cdot \frac{(5 \cdot s + 500.)}{(650 \cdot s + s^2 + 1.00 \cdot 10^5)^1} \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, } s \\ \text{float, } 3 \end{array} \right. \rightarrow 50. - 250. \cdot \exp(-400 \cdot t) + 200. \cdot \exp(-250 \cdot t)$$

По полученным оригиналам токов и напряжения на конденсаторе строим временные зависимости

$t := 0, 0.0002 \dots 0.05$ - задаем промежуток времени от 0 до 0.05 с, с шагом 0.0002 с

$i1(t) := 5. + 15. \cdot \exp(-400 \cdot t) - 15. \cdot \exp(-250 \cdot t)$

$iL(t) := 5. + 5. \cdot \exp(-400 \cdot t) - 10. \cdot \exp(-250 \cdot t)$

$iC(t) := 10. \cdot \exp(-400 \cdot t) - 5. \cdot \exp(-250 \cdot t)$

$uc(t) := 50. - 250. \cdot \exp(-400 \cdot t) + 200. \cdot \exp(-250 \cdot t)$

$uc(t) := 50 + 200. \cdot \exp(-250t) - 250 \exp(-400t)$ - временная зависимость напряжения на конденсаторе, полученная в примере 7.2.

Рис. 38. Продолжение

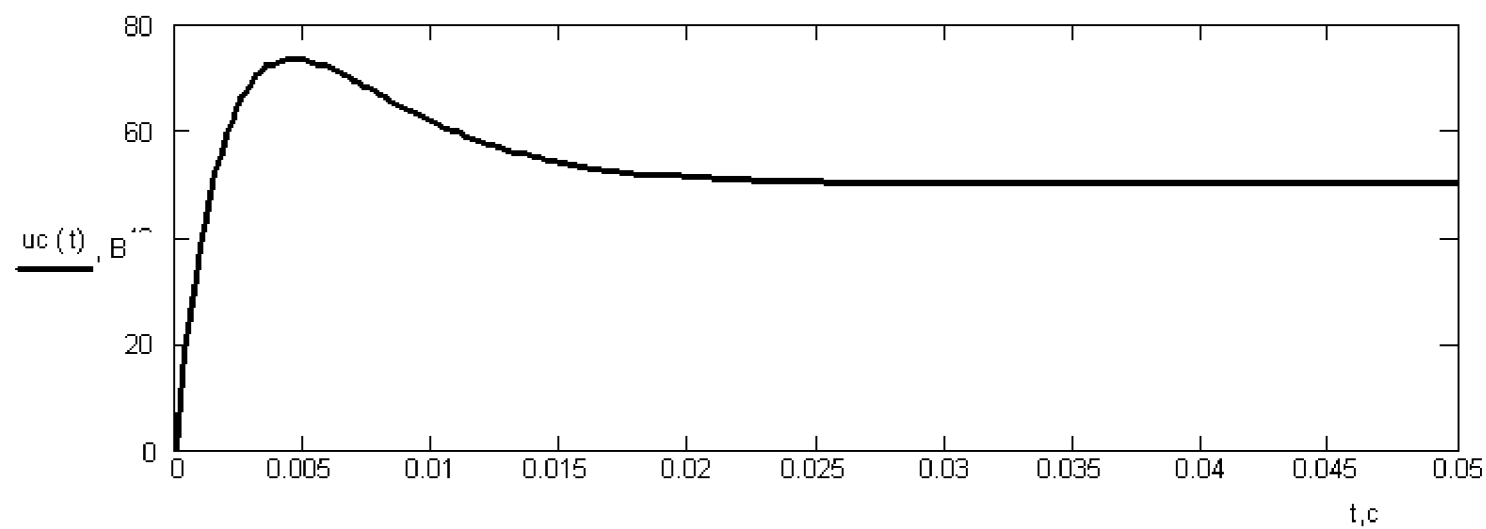
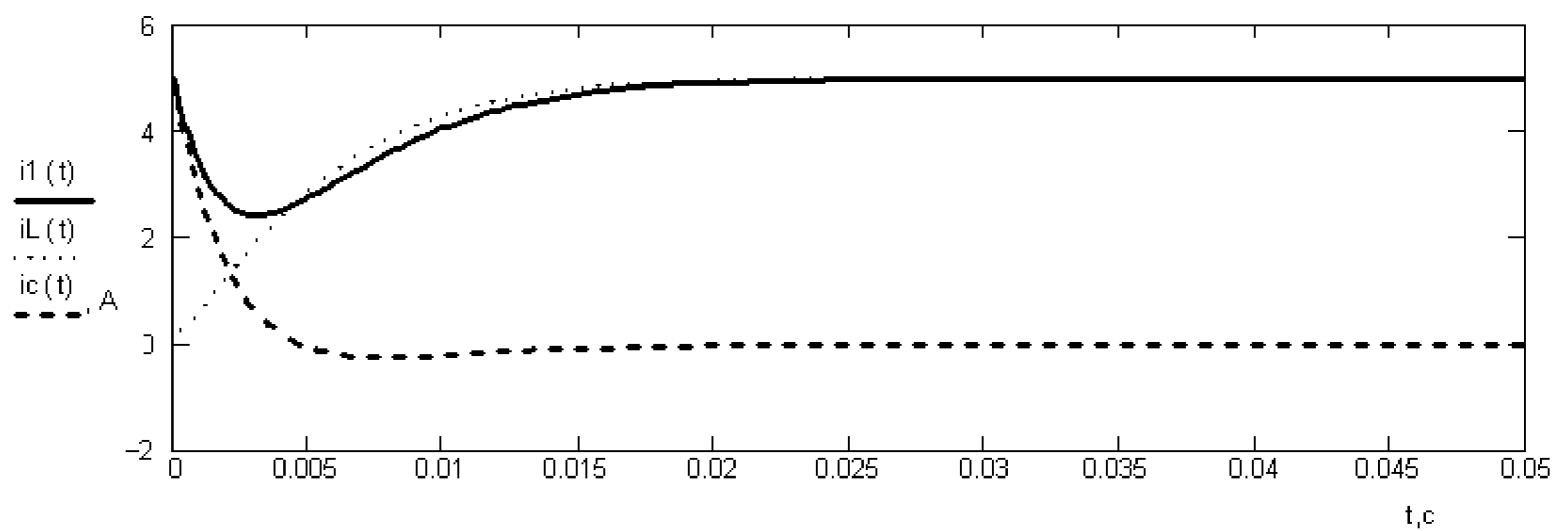


Рис. 38. Окончание

Рис. 38. Окончание

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Дайте понятие переходного процесса в электрической цепи.
2. Сформулируйте законы коммутации.
3. В чем заключается сущность классического (операторного, частотного) метода расчета переходных процессов? Назовите их достоинства и недостатки.
4. Чем определяется порядок дифференциальных уравнений?
5. Что такое характеристическое уравнение? Что определяется из этого уравнения?
6. Как можно определить корни характеристического уравнения?
7. Что такое постоянная интегрирования? Как она определяется при расчетах переходных процессов?
8. Опишите порядок расчета переходного процесса классическим (операторным, частотным) методом.
9. Что понимают под выражениями «независимые условия начальные» и «зависимые условия начальные»?
10. Что такое свободная составляющая переходного процесса? Что такое принужденная составляющая переходного процесса?
11. Как рассчитать переходный процесс в электрической цепи классическим методом без составления дифференциальных уравнений?
12. Чем отличается апериодический переходный процесс от колебательного в электрической цепи?
13. Объясните возникновение затухающих колебаний в электрических цепях при коммутациях с физической точки зрения.
14. Как рассчитывается переходный процесс при некорректной коммутации?
15. Назовите правила составления комплексных (операторных) схем замещения.
16. Как можно найти изображение функции?
17. Какие способы перехода от изображения к оригиналу функции вы знаете?
18. Существует ли связь между прямым преобразованием Лапласа и прямым преобразованием Фурье?
19. Каким методом расчета переходных процессов вы овладели наиболее успешно?

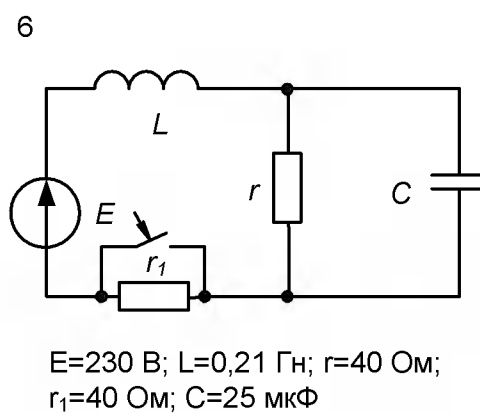
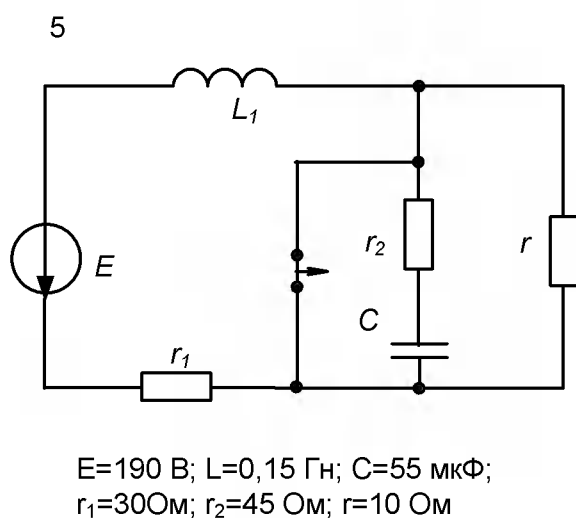
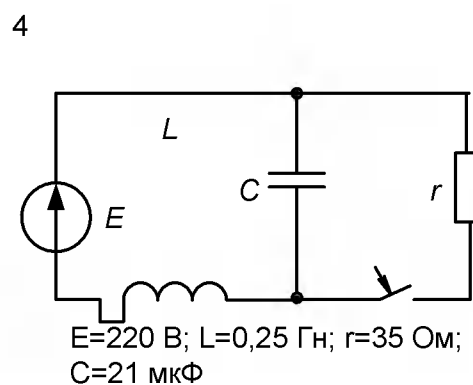
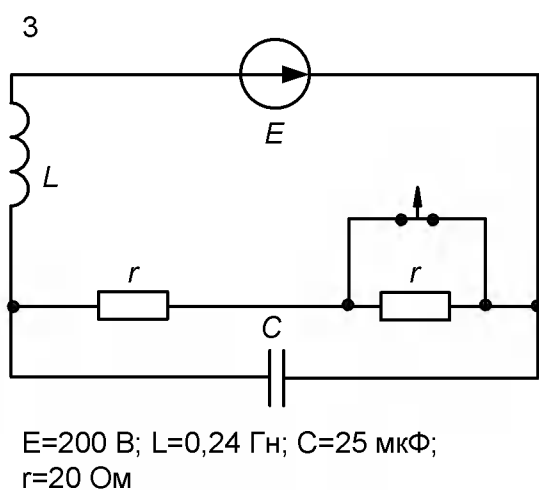
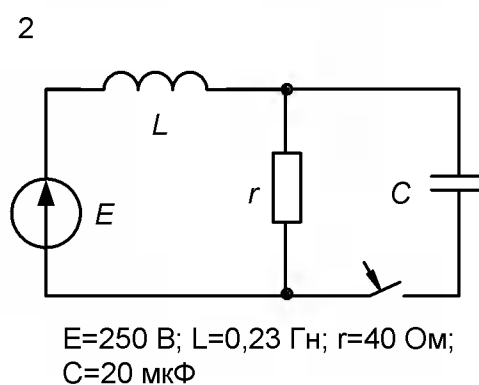
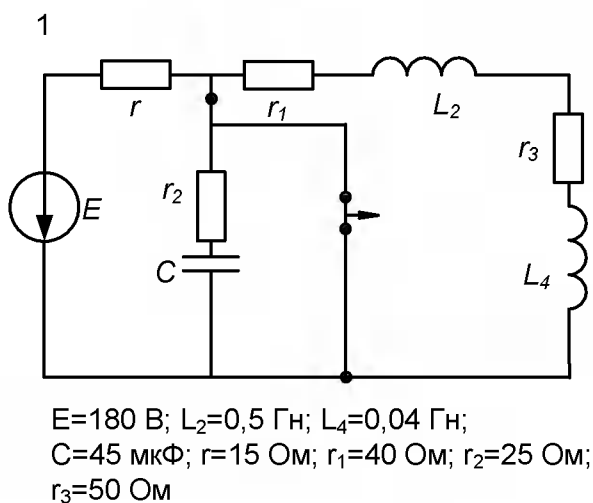
ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В практикуме были рассмотрены три метода расчета переходных процессов и предложены методические разработки девяти практических занятий по данной теме. Сравнивая предложенные методы, можно сделать вывод, что классический метод расчета наиболее полно отражает физические процессы, протекающие в цепях при переходных процессах, операторный и частотный методы – сходны, они позволяют перейти от системы дифференциальных уравнений к системе алгебраических уравнений, что значительно упрощает расчеты.

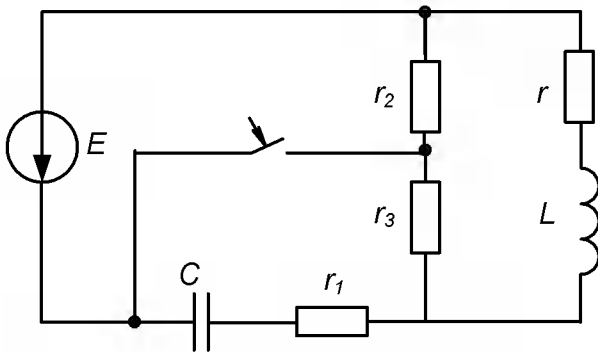
Другие методы анализа переходных процессов в электрических цепях в силу их значительной сложности и возникающих при этом громоздких вычислений, требующих большой затраты времени (практическое занятие имеет свои временные рамки), не рассматривались.

Надеемся, что вышеизложенный материал поможет студентам успешно усвоить один из разделов теоретических основ электротехники, и получить практические навыки расчета переходных процессов в сложных электрических цепях.

СХЕМЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

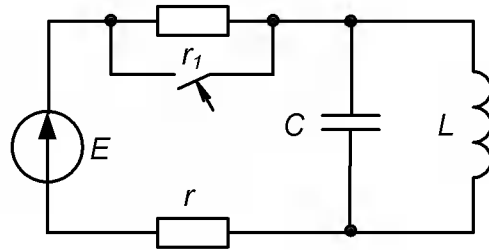


7



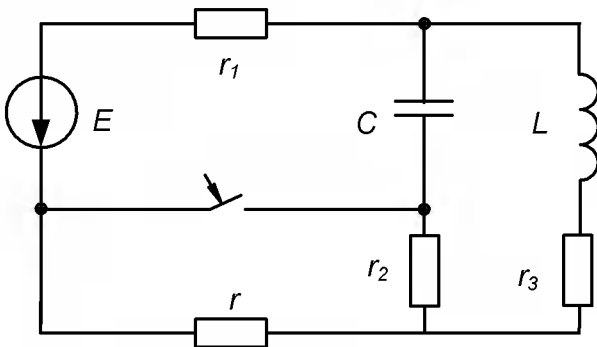
$E=100 \text{ В}; L=0,4 \text{ Гн}; C=20 \text{ мкФ}; r_1=10 \text{ Ом};$
 $r_2=50 \text{ Ом}; r_3=20 \text{ Ом}; r=30 \text{ Ом}$

8



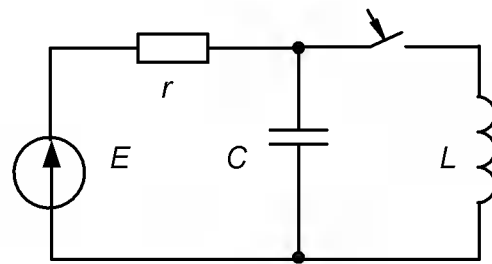
$E=240 \text{ В}; L=0,24 \text{ Гн}; C=22 \text{ мкФ}$
 $r=40 \text{ Ом}; r_1=40 \text{ Ом}$

9



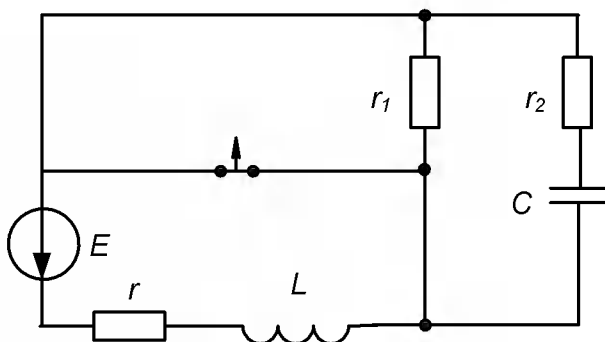
$E=120 \text{ В}; L=0,02 \text{ Гн}; C=15 \text{ мкФ};$
 $r_1=15 \text{ Ом}; r_2=85 \text{ Ом}; r_3=30 \text{ Ом}; r=20 \text{ Ом}$

10



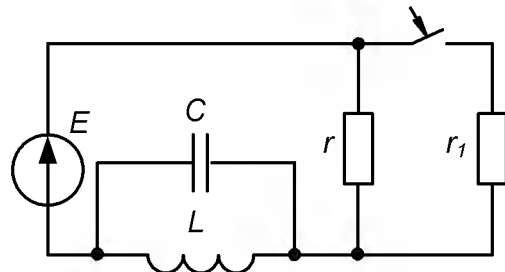
$E=250 \text{ В}; L=0,24 \text{ Гн}; C=24 \text{ мкФ};$
 $r=42 \text{ Ом}$

11



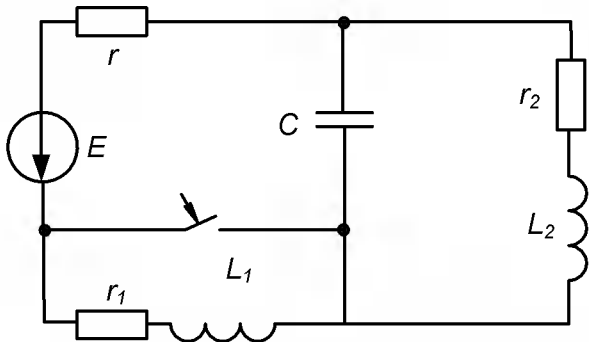
$E=140 \text{ В}; L=0,06 \text{ Гн}; C=20 \text{ мкФ};$
 $r_1=40 \text{ Ом}; r_2=50 \text{ Ом}; r=30 \text{ Ом}$

12



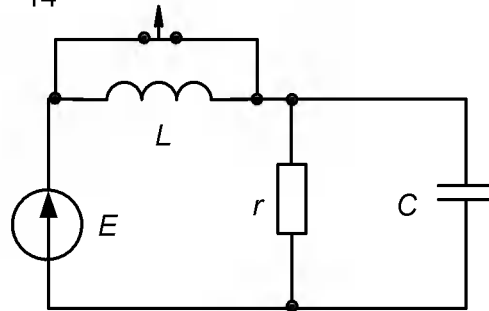
$E=220 \text{ В}; L=0,20 \text{ Гн}; C=20 \text{ мкФ};$
 $r=60 \text{ Ом}; r_1=60 \text{ Ом}$

13



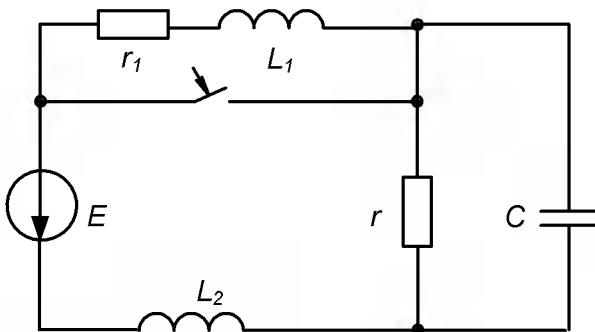
$E=110 \text{ В}; L_1=0,015 \text{ Гн}; L_2=0,025 \text{ Гн};$
 $C=60 \text{ мкФ}; r=20 \text{ Ом}; r_1=60 \text{ Ом}; r_2=10 \text{ Ом}$

14



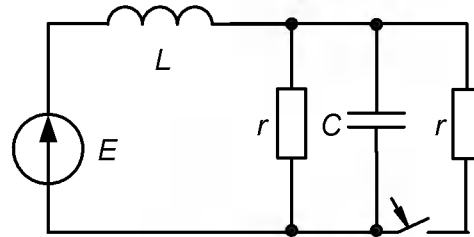
$E=230 \text{ В}; L=0,24 \text{ Гн}; r=40 \text{ Ом};$
 $C=22 \text{ мкФ}$

15



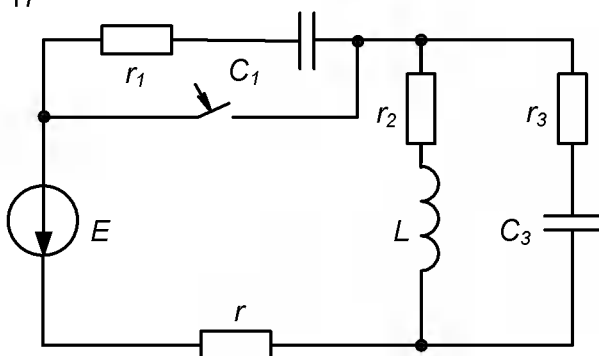
$E=130 \text{ В}; L_1=0,25 \text{ Гн}; L_2=0,05 \text{ Гн};$
 $C=15 \text{ мкФ}; r_1=25 \text{ Ом}; r=70 \text{ Ом}$

16



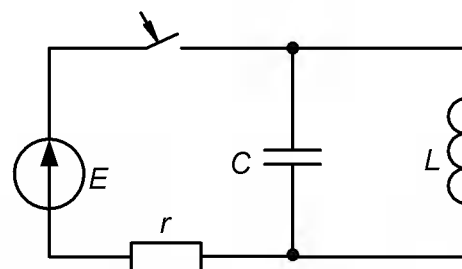
$E=240 \text{ В}; L=0,25 \text{ Гн}; r=80 \text{ Ом};$
 $C=25 \text{ мкФ}$

17



$E=150 \text{ В}; L=0,8 \text{ Гн}; C_1=20 \text{ мкФ}; C_3=30 \text{ мкФ};$
 $r_1=30 \text{ Ом}; r_2=45 \text{ Ом}; r=r_3=25 \text{ Ом}; r_4=25 \text{ Ом}$

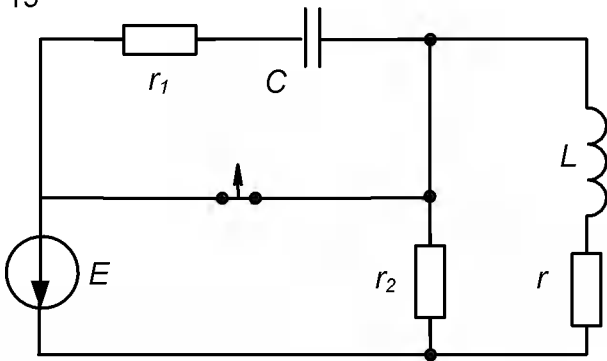
18



$E=210 \text{ В}; L=0,24 \text{ Гн}; r=45 \text{ Ом};$
 $C=27 \text{ мкФ}$

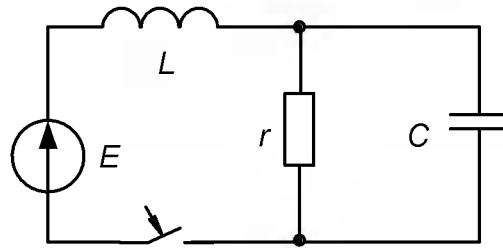
Продолжение прил. 1

19



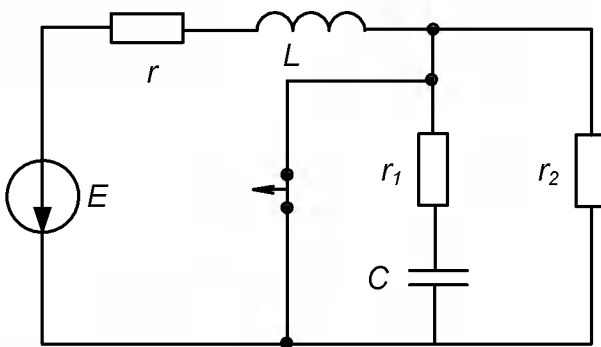
$E=160 \text{ В}; L=0,045 \text{ Гн}; C=30 \text{ мкФ};$
 $r_1=40 \text{ Ом}; r_2=35 \text{ Ом}; r=30 \text{ Ом}$

20



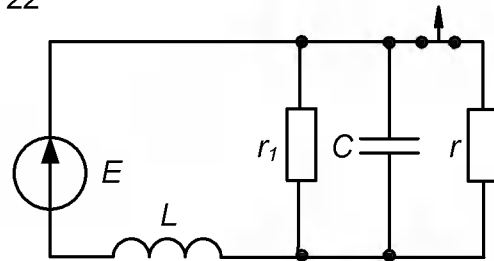
$E=240 \text{ В}; L=0,25 \text{ Гн}; r=40 \text{ Ом};$
 $C=25 \text{ мкФ}$

21



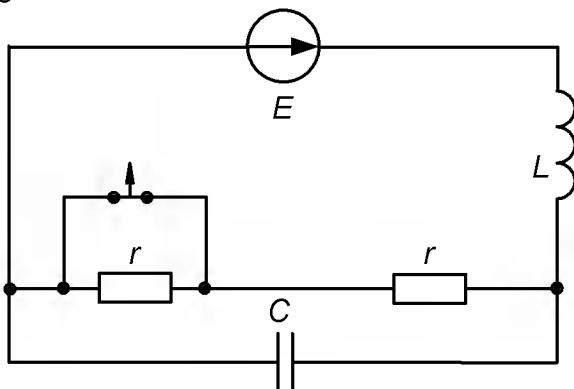
$E=170 \text{ В}; L=0,025 \text{ Гн}; C=45 \text{ мкФ};$
 $r=25 \text{ Ом}; r_1=20 \text{ Ом}; r_2=35 \text{ Ом}$

22



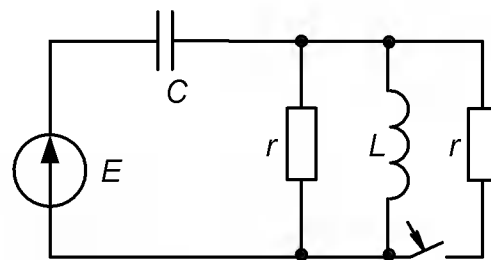
$E=240 \text{ В}; L=0,26 \text{ Гн}; r=40 \text{ Ом};$
 $r_1=40 \text{ Ом}; C=27 \text{ мкФ}$

23

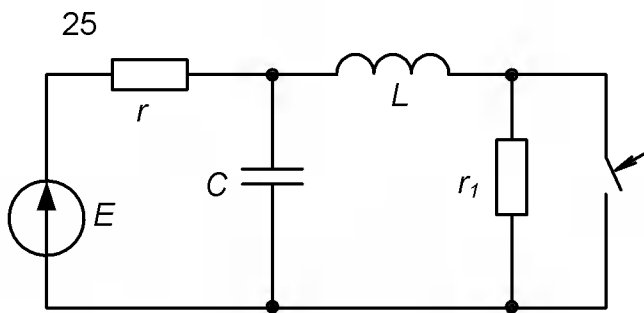


$E=210 \text{ В}; L=0,25 \text{ Гн}; C=25 \text{ мкФ};$
 $r=40 \text{ Ом}$

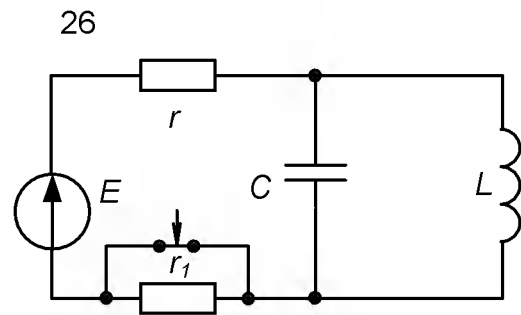
24



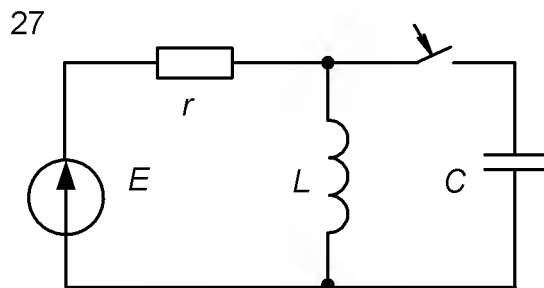
$E=240 \text{ В}; L=0,25 \text{ Гн}; C=25 \text{ мкФ};$
 $r=40 \text{ Ом}$



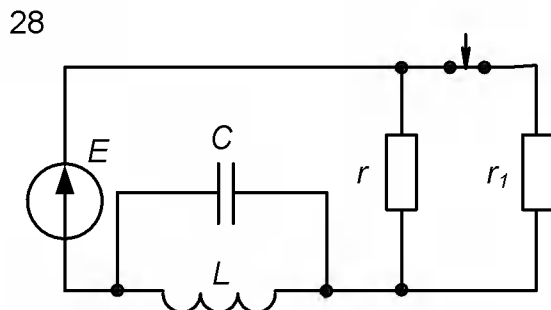
$E=230 \text{ В}; L=0,21 \text{ Гн}; C=25 \text{ мкФ};$
 $r=50 \text{ Ом}; r_1=50 \text{ Ом}$



$E=210 \text{ В}; L=0,23 \text{ Гн}; C=26 \text{ мкФ};$
 $r=40 \text{ Ом}; r_1=50 \text{ Ом}$



$E=260 \text{ В}; L=0,22 \text{ Гн}; C=22 \text{ мкФ};$
 $r=40 \text{ Ом}$

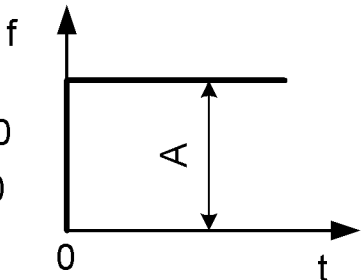
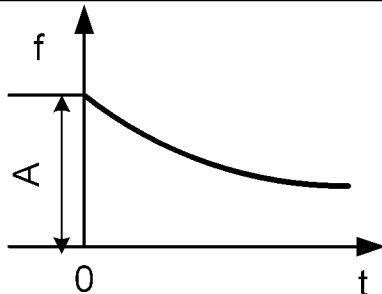
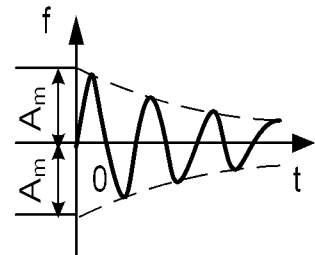


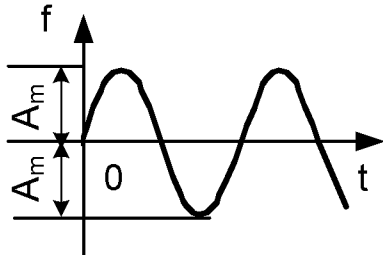
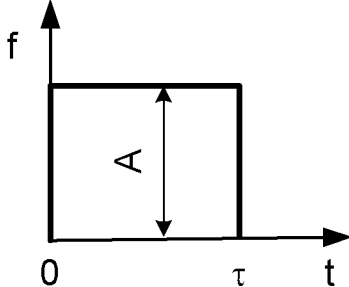
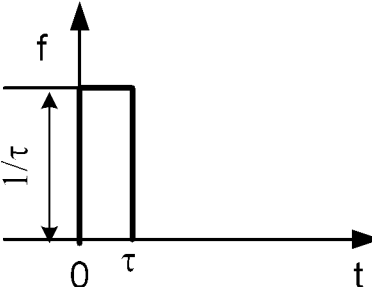
$E=230 \text{ В}; L=0,21 \text{ Гн}; C=21 \text{ мкФ};$
 $r=40 \text{ Ом}; r_1=40 \text{ Ом}$

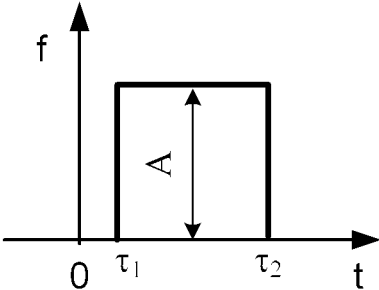
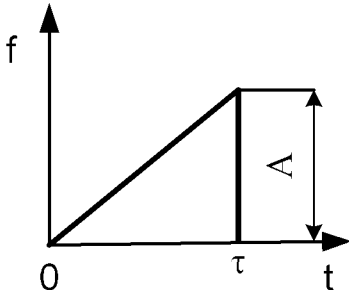
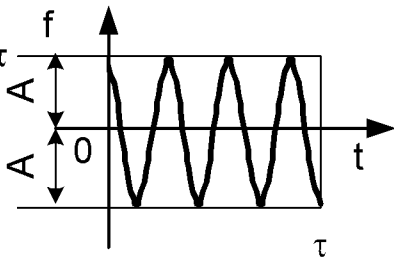
ТАБЛИЦА ОРИГИНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ ПО ЛАПЛАСУ

Оригинал	Изображение
A	$\frac{A}{p}$
$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p - \alpha}$
$1 - e^{-\alpha t}$	$\frac{\alpha}{p(p + \alpha)}$
$e^{j(\omega t + \psi)}$	$\frac{e^{j\psi}}{p - j\omega}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\sin(\omega t + \psi)$	$\frac{p \sin \psi + \omega \cos \psi}{p^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t + \psi)$	$\frac{p \cos \psi - \omega \sin \psi}{p^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$
$t^n, n - \text{целое положительное число}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p + \alpha)^2}$
$t^n e^{-\alpha t}, n - \text{целое положительное число}$	$\frac{n!}{(p + \alpha)^{n+1}}$
$\frac{t^{\alpha-1} e^{p_n t}}{(\alpha - 1)!}$	$\frac{1}{(p - p_n)^\alpha}$

ТАБЛИЦА ФУНКЦИЙ И ИХ ЧАСТОТНЫХ СПЕКТРОВ

Функция времени	Частотные спектры		
	$F(j\omega)$	Амплитуда $F(\omega)$	Фаза $\Theta(\omega)$
$f(t) = \begin{cases} A \text{ при } t \geq 0 \\ 0 \text{ при } t \leq 0 \end{cases}$ 	$\frac{A}{j\omega}$	$\frac{A}{\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$
$f(t) = \begin{cases} Ae^{-\beta t} \text{ при } t \geq 0 \\ 0 \text{ при } t \leq 0 \end{cases}$ 	$\frac{A}{j\omega + \beta}$	$\frac{A}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}}$	$-\arctg \frac{\omega}{\beta}$
$f(t) = \begin{cases} A_m e^{-\beta t} \sin \omega_0 t \text{ при } t \geq 0 \\ 0 \text{ при } t \leq 0 \end{cases}$ 	$\frac{\omega_0 A_m}{(j\omega + \beta)^2 + \omega_0^2}$	$\frac{A}{\sqrt{(\beta^2 + \omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\beta^2}}$	$-\arctg \frac{2\omega\beta}{\beta^2 + \omega_0^2 - \omega^2}$

Функция времени	Частотные спектры		
	$F(j\omega)$	Амплитуда $F(\omega)$	Фаза $\Theta(\omega)$
$f(t) = \begin{cases} A_m \sin \omega_0 t & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t \leq 0 \end{cases}$ 	$\frac{\omega_0 A_m}{-\omega^2 + \omega_0^2}$	$\left \frac{\omega_0 A_m}{-\omega^2 + \omega_0^2} \right $	$\begin{aligned} &0 \text{ при } \omega \leq \omega_0 \\ &\pi \text{ при } \omega \geq \omega_0 \end{aligned}$
$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0 \\ A & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{при } t \geq \tau \end{cases}$ 	$\frac{A}{j\omega} (1 - e^{-j\omega\tau})$	$\frac{2A}{\omega} \left \sin \frac{\omega\tau}{2} \right $	$-\frac{\omega\tau}{2}$
$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0 \\ \frac{1}{\tau} & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{при } t \geq \tau \end{cases}$ 	1	1	0

Функция времени	Частотные спектры		
	$F(j\omega)$	Амплитуда $F(\omega)$	Фаза $\Theta(\omega)$
$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq \tau_1 \\ A & \text{при } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ 0 & \text{при } t \geq \tau_2 \end{cases}$ 	$\frac{A}{j\omega} e^{-j\omega\tau_1} \times [1 - e^{j\omega(\tau_2 - \tau_1)}]$	$\frac{2A}{\omega} \left \sin \omega \frac{\tau_2 - \tau_1}{2} \right $	$- \frac{\omega(\tau_1 + \tau_2)}{2}$
$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0 \\ \frac{A}{\tau} & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{при } t \geq \tau \end{cases}$ 	$A \left[j \frac{e^{-j\omega\tau}}{\omega} - \frac{1 - e^{-j\omega\tau}}{\tau\omega^2} \right]$	$\frac{1}{\tau\omega^2} \left[(\omega\tau \sin \omega\tau - 1 + \cos \omega\tau)^2 + \omega\tau (\cos \omega\tau - \sin \omega\tau)^2 \right]^{1/2}$	$\arctg \left[\frac{\omega\tau \cos \omega\tau \sin \omega\tau}{1 + \cos \omega\tau} \right]$
$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq \tau_1 \\ A \cos \omega_0 t & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{при } t \geq \tau \end{cases}$ 	$F(j\omega) = \frac{A}{2(\omega^2 - \omega_0^2)} \{ (\omega + \omega_0) \sin(\omega - \omega_0)\tau + (\omega - \omega_0) \sin(\omega + \omega_0)\tau + j[-2\omega + (\omega + \omega_0) \cos(\omega - \omega_0)\tau + (\omega - \omega_0) \cos(\omega + \omega_0)\tau] \} = F(\omega) e^{j\Theta(\omega)}$		

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Теоретические основы электротехники : учеб. для вузов. Т. 2 / К. С. Демирчян [и др.]. – 4-е изд. – СПб. : Питер, 2004. – 576 с.
2. Попов, В. П. Основы теории цепей : учеб. для вузов / В. П. Попов. – М. : Высш. шк., 2000. – 575 с.
3. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи : учеб. для вузов / Л. А. Бессонов. – М. : Гардарика, 2002. – 638 с.
4. Матющенко, В. С. Расчет переходного процесса в сложной цепи постоянного тока : метод. пособие к расчетно-графической работе / В. С. Матющенко, О. Г. Заволока. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2001. – 32 с.
5. Сочелев, А. Ф. Теоретические основы электротехники : учеб. пособие. Ч. 2 / А. Ф. Сочелев. – Комсомольск-на-Амуре : Изд-во КНАГТУ, 2002.
6. Прянишников, В. А. Теоретические основы электротехники : учеб. пособие / В. А. Прянишников. – СПб. : Корона, 2000. – 368 с.
7. Сборник задач по теоретическим основам электротехники : учеб. пособие для вузов / под ред. Л. А. Бессонова. – М. : Высш. шк., 2000.
8. Сборник лабораторных работ по ТОЭ. Ч. 2. Сложные линейные и нелинейные электрические и магнитные цепи / О. Г. Заволока [и др.]. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 1999. – 32 с.
9. Корн, Г. А. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения. Теоремы. Формулы / Г. А. Корн, Т. М. Корн. – СПб. : Лань, 2003. – 832 с.
10. Константинов, К. В. Электротехника. Применение программы ELECTRONIC WORKBENCH для решения задач : учеб. пособие / К. В. Константинов. – Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2001. – 40 с.
11. Электротехника и электроника в экспериментах и упражнениях : практикум на ELECTRONIC WORKBENCH. В 2 т. / под ред. Д. И. Панфилова. – М. : ДОДЭКА, 1999. – 304 с.
12. Серебряков, А. С. MATHCAD и решение задач электротехники : учеб. пособие / А. С. Серебряков, В. В. Шумейко. – М. : Маршрут, 2005. – 240 с.
13. Кирьянов, Д. В. Самоучитель Mathcad 12 / Д. В. Кирьянов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2004. – 576 с.

Учебное издание

Константинова Елена Витальевна
Гафиатулина Елена Саугановна

РАСЧЕТ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Учебное пособие

Редактор Н.В. Смышляева
Технический редактор С.С. Заикина

План 2006 г. Поз. 6.2.

Сдано в набор 17.01.2006 г. Подписано в печать 17.07.2006 г.
Формат 60×84¹/₁₆. Бумага тип. № 2. Гарнитура «Arial». Печать RISO.
Усл. изд. л. 2,0. Усл. печ. л. 4,6. Зак. 208. Тираж 200 экз.

Издательство ДВГУПС
680021, г. Хабаровск, ул. Серышева, 47.